

1. Etude des fonctions u et v .

a) Question classique de cours.

Si nous supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = L \geq 0$ alors d'après le théorème sur la composition des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2x = \ln 2 + L$, ce qui ne peut être vérifié que si $L = +\infty$.

Nous en déduisons en particulier par composition des limites avec $x \leftarrow \frac{1}{x}$, que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (0.1)$$

b) Nous utilisons la composition des limites pour $x \rightarrow -1^+$, car si $x \rightarrow -1^+$ alors $\sqrt{1+x} \rightarrow 0^+$ et d'après (0.1) nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = -\infty$$

Pour $x \rightarrow +\infty$, nous devons factoriser par x pour u et par x^2 pour v car les expressions sont indéterminées, ou ce qui est plus efficace, utiliser le fait que $\ln$ est négligeable devant le polynôme pour $x \rightarrow +\infty$ (croissance comparée)

$$u(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{2} \text{ et } v(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

c) u et v sont dérivables sur $\mathcal{I}$

$$u'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2} = -\frac{x}{2(1+x)}$$

le signe de u' est l'opposé de celui de x ,

$$v'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2} + 2x = \frac{x(3+4x)}{2(1+x)}$$

le signe de v' est celui de trinôme $x(3+4x)$, nul en 0 et $-\frac{3}{4}$, positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Ce qui donne les variations de u et v

$$v\left(-\frac{3}{4}\right) = -\ln 2 + \frac{15}{16} \simeq 0.244$$

x	-1	-3/4	0	$+\infty$		
u'		+	3/2	+	0	-
u				0		
				$\nearrow$		$\searrow$
				$-\infty$		$-\infty$
v				$v(-3/4)$		$+\infty$
				$\nwarrow$		$\nearrow$
				$-\infty$		0
v'		+	0	-	0	+

d) Les courbes $(\mathcal{U})$ et $(\mathcal{V})$ sonte) Il résulte des variations de u et v que

$$u(x) \leq 0 \leq u(x) + x^2 = v(x) \text{ pour tout } x \in v_0 = \left] -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right[\text{ (par exemple)}$$

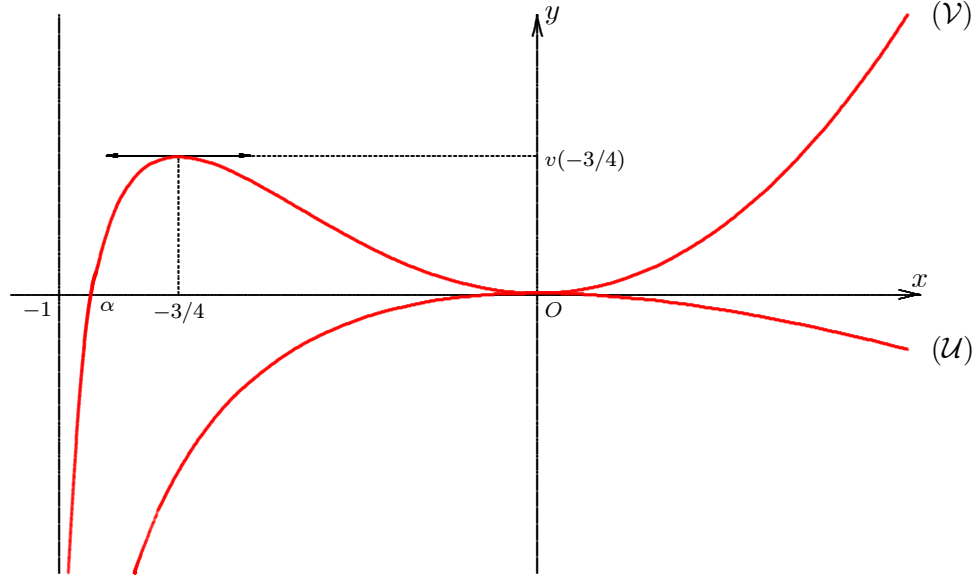
ce qui établit en ajoutant $-u(x)$ à la double inégalité

$$0 \leq -u(x) \leq x^2 \text{ ie : } |u(x)| \leq x^2 \text{ pour tout } x \in v_0$$

2. Graphiquement nous constatons que α existe et $-1 < \alpha < -\frac{3}{4}$.

a) D'après le tableau des variations la fonction v étant continue et strictement croissante sur $\mathcal{J} = \left] -1, -\frac{3}{4} \right]$ est une bijection de $\mathcal{J}$ sur $v(\mathcal{J}) = \left] -\infty, v\left(-\frac{3}{4}\right) \right]$.

Il en résulte d'après le théorème de la bijection, l'existence et l'unicité d'un zéro α pour v sur $\mathcal{J}$.

FIG. 0.1 – Représentation de $(\mathcal{U})$ et $(\mathcal{V})$.

- b) Toute suite définie par une itération n'est pas obligatoirement convergente, vérifions le pour la suite a_n .

Pour obtenir une expression de φ , il suffit d'isoler x dans l'expression de $v(x) = 0$.

Cela donne plusieurs solutions dont celle proposée.

Nous admettons que α est le point fixe de φ de l'intervalle $\mathcal{J}$.

1^{ère} preuve : φ est dérivable au moins deux fois sur $\mathcal{J}$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} + 4x = \frac{(1+2x)^2}{1+x} \text{ et } \varphi''(x) = \frac{(3+2x)(1+2x)}{(1+x)^2}$$

nous en déduisons les variations de φ' qui établissent que

$$\varphi'(x) \geq 1 \text{ pour tout } x \in \mathcal{J}$$

Ce qui en intégrant de α à x donne

$$\left| \int_{\alpha}^x \varphi'(t) dt \right| = |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| = |\varphi(x) - \alpha| \geq |x - \alpha|$$

puis en remplaçant x par a_{n-1}

$$|a_n - \alpha| \geq |a_{n-1} - \alpha|$$

et par récurrence conduit à l'inégalité

$$|a_n - \alpha| \geq |a_0 - \alpha| = \left| -\frac{3}{4} - \alpha \right|$$

donc la suite (a_n) ne peut converger vers α .

x	-1	α	-3/4
φ''		—	—
φ'		$+\infty$	1

Cette propriété prouve que dans le théorème du point fixe (Brower) la condition $|\varphi'(x)| \leq k < 1$ est nécessaire.

2^{ème} preuve : La fonction φ est croissante sur $\mathcal{J}$, donc le sens de variations de la suite est donné par le signe de

$$a_1 - a_0 = \varphi\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} = -\ln 4 + \frac{15}{8} \simeq 0.488$$

ainsi la suite est strictement croissante et ne peut donc converger vers $\alpha < -\frac{3}{4}$.

Ce résultat peut aussi être visualisé en traçant les courbes $y = \varphi(x)$ et $y = x$ afin de représenter quelques termes de la suite (a_n) .

3. Il est clair que l'itération précédente ne convient pas, nous développons dans cette question une itération qui permet de déterminer α .

a) Si nous écrivons en utilisant la factorisation canonique $x - 2x^2 = \frac{1}{8} - 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$, alors en posant $X = x - \frac{1}{4}$ et $Y = y$, l'équation de ψ dans le repère ΩXY déduit de Oxy par la translation $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ est $Y = e^{-2X^2+1/8}$, ce qui donne une fonction paire donc l'axe ΩY est un axe de symétrie.

b) Par composition des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x^2) = -\infty$ car $x - 2x^2 \sim -2x^2$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u - 1) = -1$ en posant $u(x) = x - 2x^2$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2x^2} - 1) = -1.$$

Il faut toutefois vérifier que $u(v_{+\infty}) \subset v_{-\infty}$.

c) ψ est dérivable au moins deux fois sur $\mathbb{R}$

$$\psi'(x) = (1 - 4x) e^{x-2x^2} \text{ et } \psi''(x) = (-3 + 4x)(1 + 4x) e^{x-2x^2}$$

nous en déduisons que le signe de ψ'' est celui du trinôme $(-3 + 4x)(1 + 4x)$ qui est strictement positif sur $\mathcal{J}$, ce qui donne les variations de ψ et ψ' .

x	$-\infty$	-1	α	$-3/4$	$-1/4$	0	$1/4$
ψ''	+	+	+	+	0	-	-
ψ'	0	$\psi'(-1)$	$\psi'(\alpha)$	$\psi'(-3/4)$	$\psi'(-1/4)$	1	0
ψ	-1	$\psi(-1)$	α	$\psi(-3/4)$	$\psi(-1/4)$	0	$\psi(1/4)$

FIG. 0.2 – Variations de ψ et de ψ' .

Nous en déduisons

$$0 < \psi'(x) \leq \psi'\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq 0.62 \text{ (par excès).}$$

d) La courbe (Ψ) et la première bissectrice permettent de construire les premiers

éléments de la suite (b_n) .

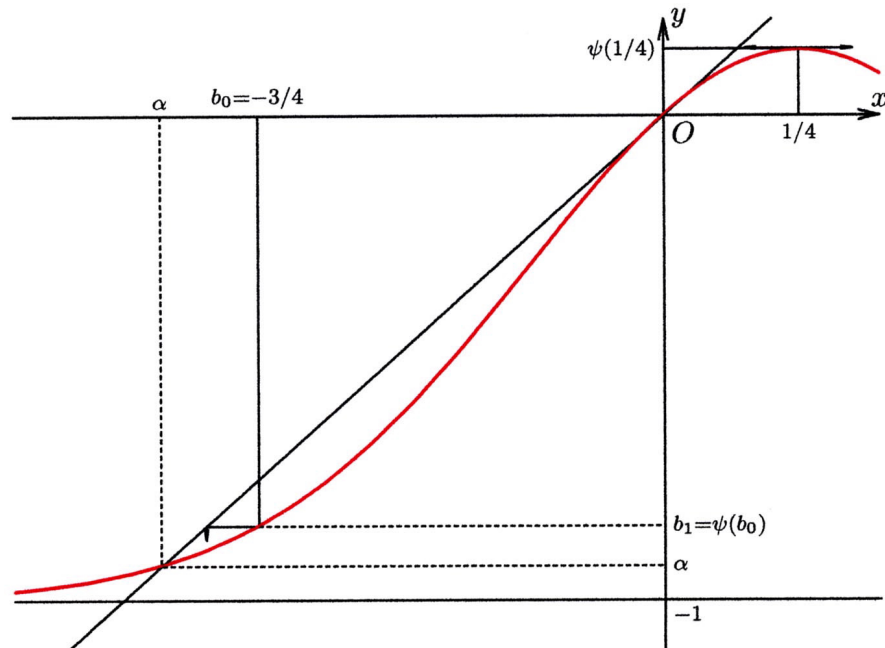


FIG. 0.3 – Représentation de (ψ) .

- e) L'itération $b_{n+1} = \psi(b_n)$ avec $b_0 = -\frac{3}{4}$ permet de déterminer une valeur approchée de α car la suite (b_n) converge vers α d'après le théorème du point fixe (Brower).

En effet d'après les variations de la fonction de ψ de classe C^1 , nous avons $\mathcal{J}$ stable par ψ car $\psi(\mathcal{J}) = [\psi(-1) \simeq -0.95, \psi(-3/4) \simeq -0.85]$, $b_0 \in \mathcal{J}$ et $|\psi'(x)| \leq \psi'(-\frac{3}{4}) \simeq 0.62$, ce qui est strictement inférieur à 1.

- f) Nous donnons deux fonctions **MatLab** pour le calcul d'une valeur approchée de α .

La fonction ψ sauvegardée sous le nom `psi.m`

```
function psi = ma_fonction(x)
```

$$\psi = \exp(x - 2x^2) - 1;$$

et la fonction itération sauvegardée sous le nom `iteration.m`

```
function iteration(u, n)
```

$$\text{for } i = 0 : n;$$

```
fprintf('%3d %18.12f\n', i, u)
```

$$u = \text{psi}(u) ;$$

end ;

Enfin la commande

```

>> iteration(-3/4, 5);

```

% $b_0 = -3/4$ et nombre d'itérations $n = 5$

0	-0.750000000000
1	-0.846645033155
2	-0.897742450954
3	-0.918701317457
4	-0.926224275578
5	-0.928781815502

La suite (b_n) converge rapidement car nous obtenons $b_{10} = -0,93005$ à 10^{-5} près.