1. *Pour x dans un voisinage de -1, nous avons*

$$f_n(x) \underset{x=-1^+}{\backsim} (-1)^n \ln(1+x),$$

avec $1+x \underset{x=-1^+}{\backsim} 0^+$.

Nous en déduisons

$$\lim_{x\to -1^+} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans tous les cas il y a une asymptote verticale.

Pour $x \to +\infty$, nous utilisons l'inégalité classique $\ln(1+x) \geqslant x$, *pour* $x \in \mathcal{I}$

$$f_n(x) \geqslant x^{n+1},$$

nous en déduisons

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Ce qui donne une branche parabolique.

La fonction f_n est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{I}$ donc dérivable sur $\mathcal{I}$

$$f_n'(x) = n\,x^{n-1} \ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left[n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right], \tag{0.1}$$

où nous notons $h_n(x) = n \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

La fonction h_n est dérivable sur $\mathcal{I}$

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}.$$

Il est clair que le numérateur de h_n' est supérieur ou égal à 1 sur $\mathcal{I}$, donc $h_n'(x) > 0$ sur $\mathcal{I}$.

D'après (0.1) *le signe de $f_n'(x)$ ne dépend que de x^{n-1}, ce qui donne deux cas à examiner.*

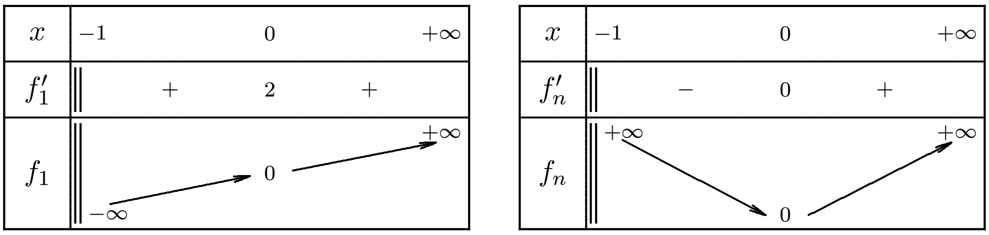

FIG. 0.1 – Variations de f_1 et de f_n, pour $n \geqslant 2$.

2. *La fonction f_n est continue sur $\mathcal{I}$ donc admet une primitive.*

Nous intégrons par parties afin d'éliminer le $\ln$

$$\left|\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \\ dv = x^n\,dx \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{1+x} \\ v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \end{array}\right.$$

où $\displaystyle\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$.

Il est évident que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont de classe C^1 sur $\mathcal{I}$.

Nous en déduisons

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx + \mathrm{Cste}\,.$$

Nous faisons dans l'intégrale le changement de variable affine $t = 1 + x$, qui est valide car de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'intégrand devient

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{(t-1)^{n+1}}{t} = \frac{(-1)^{n+1}}{t} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, t^{k-1},$$

ce qui donne en intégrant terme à terme (somme finie donc sans problème)

$$\int \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx = (-1)^{n+1} \ln t + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, \frac{t^k}{k} + \mathrm{Cste}\,.$$

Il suffit alors de remplacer t par $1 + x$

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1} - (-1)^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, \frac{(1+x)^k}{k} + \mathrm{Cste}\,. \tag{0.2}$$

3. *Nous avons sur l'intervalle $[0,\ 1]$*

$$x^{n+1} \leqslant x^n \Rightarrow x^{n+1} \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(1+x)$$

et par positivité de l'intégrale

$$0 \leqslant I_{n+1} = \int_0^1 x_{n+1} \ln(1+x)\, dx \leqslant I_n = \int_0^1 x_n \ln(1+x)\, dx,$$

ce qui exprime que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, donc d'après le ***théorème de la borne inférieure*** *converge.*

Nous pouvons écrire sur l'intervalle $[0,\ 1]$

$$0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^{n+1} \ln 2$$

et par positivité de l'intégrale

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2\, dx = \frac{\ln 2}{n+1},$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. *D'après (0.2), nous avons*

$$\begin{aligned}
I_n &= F_n(1) - F_n(0) \\
&= \frac{x^{n+1} - (-1)^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, \frac{(1+x)^k}{k} \\
&= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \ln 2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, \frac{2^k - 1}{k},
\end{aligned}$$

nous déduisons du ***3.*** *que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k}\, \frac{2^k-1}{k} = 0$, ce que nous pouvons écrire en tenant compte de $\dbinom{n+1}{k} = \dfrac{n+1}{k} \dbinom{n}{k-1}$*

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^k\, \frac{2^k - 1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Une question subsidiaire : faire un programme ***MatLab*** *qui contrôle ce résultat.*