Nous considérons les fonctions de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\mathcal{I} =]-1,\, +\infty[$ par

$$u(x) = \ln\sqrt{1+x} - \frac{x}{2} \text{ et } v(x) = \ln\sqrt{1+x} - \frac{x}{2} + x^2$$

de courbes représentatives respectives $(\mathcal{U})$ et $(\mathcal{V})$ dans le repère orthonormal Oxy.

1. *Etude des fonctions u et v.*

a) *Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (On pourra raisonner par l'absurde).*

b) *Déterminer les limites de $u(x)$ et de $v(x)$ en $x = -1^+$ et en $x = +\infty$.*

c) *Etudier les variations des fonctions u et v sur $\mathcal{I}$.*

d) *Construire les courbes $(\mathcal{U})$ et $(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{I}$.*

e) *Etablir qu'il existe un voisinage de $x = 0$ que l'on précisera, dans lequel $|\, u(x)\,| \leqslant x^2$.*

2. *Etude de la solution non nulle α de l'équation*

$$v(x) = 0. \qquad (E)$$

a) *Montrer que v est une bijection de $\mathcal{J} = \left]-1,\, -\frac{3}{4}\right]$ sur $\left]-\infty,\, v\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.*

En déduire que l'équation (E) admet dans $\mathcal{J}$ une racine α unique.

b) *L'équation (E) peut-être écrite sous la forme $x = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \ln\,(1+x) + 2\,x^2$.*

L'itération $a_{n+1} = \varphi\,(a_n)$ avec $a_0 = -\frac{3}{4}$ ne permet pas de déterminer une valeur approchée de α.

1ère preuve : Etudier les variations de φ' et conclure.

2ème preuve : Etudier la croissance de la suite (a_n) et conclure.

3. *Soit la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\psi(x) = e^{x-2\,x^2} - 1$$

de courbe représentative Ψ dans le repère orthonormal Oxy.

a) *Montrer que Ψ admet un axe de symétrie.*

b) *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$.*

c) *Montrer que $\forall\, x \in \mathcal{J}$ la dérivé de ψ vérifié l'inégalité $0 < \psi'(x) \leqslant \psi'\left(-\frac{3}{4}\right)$.*

d) *Construire dans le repère Oxy la courbe $(\boldsymbol{\Psi})$ et la première bissectrice.*

e) *Etablir que l'itération $b_{n+1} = \psi\,(b_n)$ avec $b_0 = -\frac{3}{4}$ permet de déterminer une valeur approchée de α.*

f) *Calculer, à l'aide d'une fonction **MatLab**, les 5 premiers termes de cette suite à 10^{-5} près.*

Indication :

Exercice de révision sur les suites, programme de 1ère année.

Encadrement de fonctions et développements limités, Tome 1 : pages 265 et 266.

Tome 1 - Théorèmes 6.13 : page 293 et 7.20 : page 331.

Programmes en MatLab, Problème 1ère année - Thème 9 : page 90. ★