On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies sur* $\mathcal{I} =]-1, +\infty[$ *par*

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

1. *Etudier les variations de* f_n, *il sera nécessaire de séparer* f_1 *et* f_n, *pour* $n \geqslant 2$.

2. *Montrer que* f_n *admet une primitive* F_n *sur* $\mathcal{I}$.
Expliciter F_n *en fonction de* x *et de* n.
Indication : on pourra exprimer F_n *sous la forme*

$$F_n(x) = \left(a\, x^{n+1} + b\right) \ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n+1} c_k\, (1+x)^k,$$

où a, b *et* c_k, *avec* $k = 1..(n+1)$, *sont indépendant de* x.

3. *Indépendamment de la question précédente, nous considérons la suite*

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante et majorée, conclure pour sa convergence. On ne demande pas sa limite.*

4. *En déduire que la suite numérique* $\left(u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^k \frac{2^k - 1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0.*

Indication :

Exercice portant sur le programme de 1ère année.

Revoir les propriétés des fonctions logarithmes - Tome 1 : pages 369 à 372.

Reprendre l'intégration par parties, mieux appropriée que l'indication proposée - Tome 1 : théorème 10.17 : page 410.

Une révision sur les formules de dénombrement, pour l'entretien de la forme - Tome 1 : § 3.3 : pages 536 à 544.

Attention la suite u_n peut être écrite sous la forme

$$u_n = \sum_{k=1}^{n+1} v_k, \text{ avec } v_k = \binom{n}{k-1} (-1)^k \frac{2^k - 1}{k^2},$$

ce qui ressemble à une série, cf. Tome 2 : définition 4.1 : page 93, mais qui n'est pas une série. ★