

Avant - propos

*“C’est dans les mathématiques que réside le principe vraiment créateur.
Nous aurons le destin que nous aurons mérité.”*

Albert EINSTEIN (1879 - 1955)

Cet ouvrage correspond au programme 2003 des **CPGE** du type **BCPST - VETO 2^{ème} année**, mais est utilisable par d’autres CPGE du type **EC** notamment, ou encore en **licence universitaire** ou pour la **préparation de divers concours**.

Il fait suite au cours de 1^{ère} année : **Tome 1 - Cours, Exercices et Informatique** paru en 2006 aux éditions Ellipses.

Il sera fait tout au long du développement de nombreuses références au **tome 1**, que nous supposons connu par nos lecteurs. Elles seront précisées en début de chapitre par des rappels succincts ainsi que dans de nombreux paragraphes. Nous rappelons que certains sujets (parfois partiels) de concours peuvent être utilement traités en première année.

Cet ouvrage de 20 chapitres correspond aux trois parties du programme :

Géométrie - Algèbre linéaire

Analyse

Probabilités

En particulier les deux derniers chapitres : **Statistique descriptive à deux variables** et **Estimation** pourront être utiles pour la préparation des **TIPE**.

Il est conseillé de traiter ces chapitres dans l’ordre proposé.

La notation : cf. l’**exercice 4.3**, fait référence au troisième exercice du **chapitre 4**, de même la notation : cf. **théorème 11.1**, fait référence au premier théorème **du chapitre 11**, les autres références sont faites au **tome 1** de première année ou au **livre de problèmes** de première année en précisant la nature et la page.

La partie **Cours** est une suite de **définitions** et de **théorèmes** qui sont pour la plupart établis ; ils sont tous nécessaires à la compréhension des outils mathématiques, les preuves peuvent être “mises en réserve” dans une première lecture.

Les **exercices d’applications** proviennent (avec des aménagements et des compléments) pour l’essentiel des concours **Agro, Vêto** et **EC**.

Il est impératif de bien les connaître, car si l’écrit élimine les “mauvais”, l’oral classe les “bons”, un point peut faire toute la différence entre être admis ou collé.

Nous avons pour chacun des chapitres fondamentaux proposés un ou plusieurs sujets corrigés de concours ; ils formeront la base des révisions de fin d’année.

Table des matières

I	Algèbre Linéaire	1
1	Nombres complexes - Polynômes	3
1.1	Le corps des nombres complexes	3
1.1.a	Rappels et compléments	3
1.1.b	Le corps des complexes	4
1.1.c	Conjugué	6
1.1.d	Définition géométrique	10
1.1.e	Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe	11
1.2	Polynômes	19
1.2.a	Trigonométrie et polynôme	20
1.2.b	Zéros d'un polynôme	21
1.2.c	Factorisation dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$	24
1.3	Compléments sur les angles	26
1.4	Pentagone - QCM	29
1.5	Nombres complexes et polynôme	35
2	Calcul Matriciel - Suites	41
2.1	Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$	41
2.1.a	Structure d'espace vectoriel des matrices	41
2.1.b	Produit de deux matrices	41
2.1.c	Matrices qui commutent	42
2.1.d	Puissance $r^{\text{ème}}$ d'une matrice	46
2.2	Transposition	54
2.2.a	Définition	54
2.2.b	Transposée d'une somme	54
2.2.c	Transposée d'un produit	55
2.2.d	Matrices symétriques et anti-symétriques	55
2.3	Carré magique	64
3	Systèmes d'équations linéaires	67
3.1	Technique du pivot de Gauss	67
3.2	Résolution des systèmes linéaires	70
3.3	Matrices inversibles	74
3.4	Méthode du simplexe	86

4	Espaces vectoriels	97
4.1	Introduction	97
4.1.a	Définition et exemples	97
4.1.b	Sous espaces vectoriels	99
4.1.c	Sous espaces vectoriels supplémentaires	102
4.2	Familles de vecteurs. Bases	104
4.2.a	Equation fondamentale	104
4.2.b	Bases d'un espace vectoriel	105
4.2.c	Matrice d'une famille. Rang d'une famille	111
4.2.d	Caractérisation des bases	115
4.3	Changement de base	119
4.3.a	Introduction	119
4.3.b	Matrice de changement de base	119
4.3.c	Réduite de Gauss - Jordan	133
4.4	Polynômes de Grégory	139
4.5	Somme directe de sous espaces vectoriels	143
5	Applications linéaires	155
5.1	Définitions	155
5.1.a	Applications linéaires	155
5.1.b	Espace vectoriel des applications linéaires	157
5.1.c	Image et noyau	157
5.1.d	Injectivité, surjectivité, bijectivité	162
5.1.e	Composition d'applications linéaires	164
5.1.f	Projecteur et symétrie	170
5.1.g	Groupe linéaire	173
5.2	Matrice d'une application linéaire	174
5.2.a	Définition	174
5.2.b	Espace vectoriel des matrices	175
5.2.c	Equation de $\text{Im } \varphi$ et de $\text{ker } \varphi$	175
5.2.d	Produit de deux matrices	183
5.3	Endomorphismes	184
5.3.a	Inverse d'une matrice	186
5.3.b	Matrices semblables	187
5.3.c	Application à la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice	191
6	Réduction des matrices	197
6.1	Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme	199
6.1.a	Définitions	199
6.1.b	Propriétés	203
6.2	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice	206
6.2.a	Définitions	206
6.2.b	Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2 ou 3	207

6.2.c	Valeurs propres d'une matrice d'ordre n	210
6.2.d	Propriétés	215
6.3	Réduction d'une matrice ou d'un endomorphisme	230
6.3.a	Diagonalisation	233
6.3.b	Trigonalisation ou triangulation	245
6.3.c	Propriétés de la trace d'une matrice	253
6.3.d	Utilisation des hyperplans stables	255
6.4	Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice	263
6.5	Matrices stochastiques	273
6.6	Parties stables par un endomorphisme	288
7	Espaces euclidiens	301
7.1	Définitions	301
7.1.a	Produit scalaire	301
7.1.b	Base orthonormale	304
7.1.c	Orthogonalisation de Gram - Schmidt	304
7.2	Plan euclidien orienté	313
7.2.a	Déterminant d'ordre 2	313
7.2.b	Base orthonormale	313
7.3	Espace usuel euclidien orienté	320
7.3.a	Produits scalaire et vectoriel	320
7.3.b	Base orthonormale directe	321
7.3.c	Matrices symétriques réelles et diagonalisation	334
7.3.d	Matrices orthogonales	337
7.3.e	Changement de repère affine	342
7.4	Le loran	358
II	Analyse	365
8	Fonctions d'une variable réelle	367
8.1	Polynômes	367
8.1.a	Arithmétique des polynômes	367
8.1.b	Zéros d'un polynôme	368
8.1.c	Espace vectoriel des polynômes	371
8.2	Suites	373
8.2.a	Suite itérée	373
8.2.b	Suites adjacentes	378
8.2.c	Suites linéaires	381
8.2.d	Compléments	390
8.3	Fonctions	392
8.3.a	Limites	392
8.3.b	Coniques	393
8.3.c	Continuité	397

8.3.d	Formule des accroissements finis	400
8.3.e	Fonctions trigonométriques et inverses	401
8.4	Développements limités	404
8.5	Logarithmes et exponentielles	406
8.6	Méthodes numériques	416
8.7	DI de tangente hyperbolique	423
9	Calcul intégral	429
9.1	Intégrale impropre	429
9.1.a	Fonction définie presque partout	429
9.1.b	Convergence ou divergence d'une intégrale impropre	430
9.1.c	Quelques critères de convergence	442
9.1.d	Convergence absolue	445
9.1.e	Compléments d'oral	447
9.2	Valeurs approchées d'une intégrale	454
10	Equations différentielles	461
10.1	Compléments	461
10.1.a	Equations différentielles linéaires.	461
10.1.b	Equations différentielles non linéaires	471
10.1.c	Boucle respiratoire	473
10.2	Noyau et équation différentielle	479
10.3	Système différentiel linéaire	483
11	Séries numériques	493
11.1	Définitions et propriétés générales	493
11.1.a	Série numérique	493
11.1.b	Série géométrique	495
11.1.c	Propriétés des séries numériques	496
11.2	Séries à termes positifs	497
11.3	Séries à termes réels	504
11.4	Développement limité et série	516
11.4.a	Introduction	516
11.4.b	Exemples fondamentaux	516
12	Fonctions de plusieurs variables	519
12.1	Domaines de $\mathbb{R}^n$	519
12.1.a	Distance dans $\mathbb{R}^n$	519
12.1.b	Boules et pavés de $\mathbb{R}^n$	520
12.1.c	Domaine simple de $\mathbb{R}^n$	521
12.1.d	Changement de variable dans un domaine	524
12.2	Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$	525
12.3	Continuité	526
12.4	Dérivées partielles	528

12.4.a Définitions	529
12.4.b Interversion	531
12.4.c Fonctions composées	533
12.4.d Fonctions homogènes	537
12.5 Différentiation	539
12.5.a Accroissement total	539
12.5.b Formule de Taylor	539
12.5.c Différentielles	540
12.5.d Forme différentielle de degré 1	541
12.5.e Changement de variable dans une différentielle	544
12.6 Analyse vectorielle	546
12.6.a Champ scalaire et champ vectoriel	546
12.6.b Gradient	549
12.6.c Rotationnel	549
12.6.d Divergence	550
12.6.e Circulation d'un champ vectoriel	551
13 Calcul d'aires et de volumes	553
13.1 Intégrales doubles	553
13.1.a Définition d'une intégrale double	553
13.1.b Propriétés	557
13.2 Calcul d'aires et de volumes	558
13.2.a Aire d'une surface plane	558
13.2.b Changement de variable dans une intégrale double	561
13.2.c Formule de Green - Riemann	564
13.2.d Intégrale double impropre	566
13.3 Intégrales triples	568
III Probabilités	571
14 Variables aléatoires discrètes finies	573
14.1 Fonction de transfert	573
14.2 Ensemble - Analyse combinatoire	573
14.3 Introduction aux probabilités	575
14.4 Loi binomiale	592
14.5 Couple de variables aléatoires	594
14.6 Loi hypergéométrique	601
14.7 Fonction génératrice	602
14.7.a Définition	602
14.7.b Propriétés	603
14.7.c Fonction génératrice des lois usuelles	605
14.7.d Cas particulier	607
14.8 Problème de révision	610

15 Variables aléatoires discrètes dénombrables	623
15.1 Introduction	623
15.2 Loi géométrique	625
15.2.a Définitions	625
15.2.b Moments	626
15.2.c Fonction génératrice	627
15.3 Loi de Pascal et loi binomiale négative	633
15.3.a Loi de Pascal	633
15.3.b Loi binomiale négative	637
15.4 Loi de Poisson	646
15.4.a Processus de Poisson.	646
15.4.b Définition et représentation	646
15.4.c Moments.	648
15.4.d Valeurs modales	648
15.4.e Somme de deux lois de Poisson	648
15.4.f Fonction génératrice de Poisson	653
15.5 Résumé des v.a.d	654
16 Densités de probabilités	655
16.1 Généralités	655
16.1.a Variable aléatoire absolument continues	655
16.1.b Représentation	659
16.1.c Moments	660
16.2 Loi uniforme	662
16.2.a Définition	662
16.2.b Représentation de la loi uniforme	663
16.2.c Moments	663
16.3 Loi exponentielle	664
16.3.a Définition	666
16.3.b Représentation de la loi exponentielle	666
16.3.c Moments	667
16.4 Loi normale	668
16.4.a Calcul de l'intégrale de Laplace - Gauss	669
16.4.b Définitions et propriétés	674
16.4.c Représentation de la loi normale	675
16.4.d Loi normale centrée réduite	675
16.4.e Calculs pratiques	677
16.5 Changement de variable aléatoire	679
16.6 Compléments	687
16.6.a Loi log - normale	687
16.6.b Loi du t de Student - Fisher	689
16.6.c Informatique	692
16.7 Résumé des v.a.c	694

17 Couples de variables aléatoires continues	695
17.1 Introduction	695
17.2 Densité de probabilité dans $\mathbb{R}^n$	695
17.2.a Fonction de répartition	695
17.2.b Fonction densité	695
17.3 Couple de variables aléatoires à densité	697
17.3.a Densité d'un couple	697
17.3.b Moments	697
17.3.c Lois de probabilités marginales	698
17.3.d Variables aléatoires indépendantes	700
17.3.e Fonction de répartition	705
17.3.f Produit de convolution	710
17.3.g Somme de variables aléatoires normales	713
18 Théorèmes limites	721
18.1 Convergence en probabilité	721
18.1.a Inégalités de Markov et de Bienaymé - Tchebichev	721
18.1.b Loi faible des grands nombres	722
18.2 Convergence en loi	732
18.2.a Définitions	732
18.2.b Propriété caractéristique	733
18.3 Théorème de la limite centrale	733
18.3.a Correction de continuité	733
18.3.b Théorèmes limites	734
18.4 Exemples de convergence en loi	736
18.4.a Convergence en loi de $\mathcal{H}(N, n, p)$ vers $\mathcal{B}(n, p)$	736
18.4.b Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$	737
18.4.c Convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	738
18.4.d Convergence en loi de $\mathcal{P}(\lambda)$ vers $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	739
18.4.e Exercice complémentaires	741
18.5 Résumé des convergence	750
19 Statistique descriptive à deux variables	751
19.1 Etude et propriétés	751
19.1.a Définition	751
19.1.b Représentation graphique	753
19.1.c Paramètres d'une v.s.d	753
19.1.d Droites de régression	754
19.2 Informatique	756
20 Estimation	761
20.1 Distributions d'échantillonnages	761
20.1.a Distribution d'échantillonnage des moyennes	761

20.1.b	Distribution d'échantillonnage des fréquences	763
20.1.c	Distribution d'échantillonnage des variances	764
20.2	Estimation ponctuelle	765
20.2.a	Estimation sans biais	765
20.2.b	Théorèmes fondamentaux de l'estimation ponctuelle	765
20.3	Estimation par intervalle de confiance	767
20.3.a	Estimation de la moyenne	767
20.3.b	Estimation d'une fréquence par intervalle de confiance	770
20.4	Comparaison de deux échantillons	771
20.4.a	Principe pour deux moyennes	771
20.4.b	Cas où les échantillons sont indépendants	772
20.4.c	Cas où les échantillons sont dépendants	774
20.4.d	Table de la loi du t de Student - Fisher	776

1.1.c Conjugué

Cf. tome 1 - définition 1.13 et théorème 1.18 : page 21.

Exercice 1.2

Nous considérons un circuit R, L, C série, connecté à l'instant $t = 0$ à une source de tension sinusoïdale $U(t) = U_m \cos \omega t$.

Nous déterminons la loi de variation de l'intensité $I(t)$.

Nous rappelons que $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$.

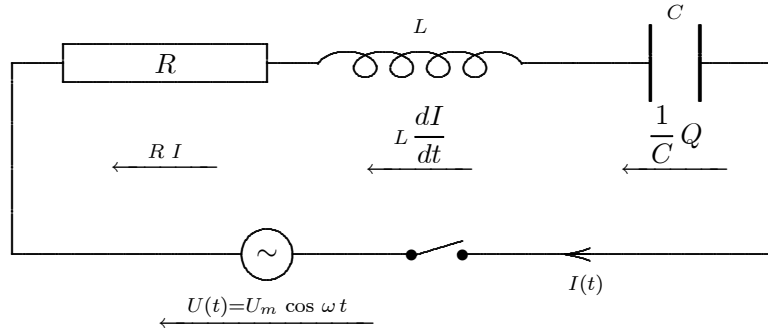


FIG. 1.1 – Représentation du circuit RLC.

Le courant $I(t)$ et la charge $Q(t)$ vérifient l'équation différentielle

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = U_m \cos \omega t. \quad (1.6)$$

Pour $\lambda = \frac{R}{2L}$ (coefficient d'amortissement), $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (pulsation propre) et

$A = \frac{U_m}{L}$, cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{dI}{dt} + 2\lambda I + \omega_0^2 Q = A \cos \omega t. \quad (1.7)$$

1. Montrer que Q vérifie une équation différentielle du second ordre.
2. Dans ce qui suit : $\lambda = 1$, $\omega_0 = \sqrt{2}$, $A = 1$, $\omega = 1$ et nous supposons les conditions initiales $Q(0) = 0$ et $I(0) = Q'(0) = 0$.
 - a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène associée.
 - b) Déterminer une solution particulière Q_0 de cette équation différentielle.
Exprimer $Q_0(t)$ sous la forme $R \cos(t + \varphi)$ où φ est un angle dont on donnera le cosinus et le sinus.
 - c) Donner la solution, notée $f(t)$, vérifiant les conditions initiales.
 - d) Tracer sommairement la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
Que passe-t-il pour $t \rightarrow +\infty$?

3. Résolution de l'équation différentielle (1.6) en utilisant les nombres complexes.

Nous associons à $I(t)$ le nombre complexe $I_m e^{i(\omega t + \varphi_i)}$, avec φ_i déphasage à l'origine, que nous notons $\underline{I}_m$.

- a) Montrer que $i\omega \underline{I}_m$ et $\frac{\underline{I}_m}{i\omega}$ sont respectivement associés à $\frac{dI}{dt}$ et $Q(t) = \int I(t) dt$.

2. Cas général.

a) Si $\alpha \in \mathcal{R}$ alors en faisant $X \leftarrow \alpha$ l'expression (1) devient

$$P(\alpha^2) = -P(\alpha) P(\alpha + 1) = 0,$$

d'où $\alpha^2 \in \mathcal{R}$.

Nous en déduisons que

$$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \dots, \alpha^{2^n}, \dots\} \subset \mathcal{R}.$$

Ce qui, sauf $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$, est impossible car si $\deg P = n$ alors $\text{Card } \mathcal{R} \leq n$, donc fini.

En d'autres termes, la seule possibilité est que α soit une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, ce qui veut dire que $\mathcal{R}$ ne peut contenir que les n zéros distincts : $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$.

De même si $\alpha \in \mathcal{R}$ alors en faisant $X + 1 \leftarrow \alpha$ l'expression (1) devient

$$P((\alpha - 1)^2) = -P(\alpha - 1) P(\alpha) = 0,$$

d'où $(\alpha - 1)^2 \in \mathcal{R}$. Ce qui conduit avec le même raisonnement que ci-dessus à $|\alpha| = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

Il est réconfortant que les résultats obtenus sont compatibles avec le 1.

Déterminons les autres zéros autres que 0 et 1.

Les nombres complexes α tels que $|\alpha| = 1$ et $|\alpha - 1| = 1$ sont obtenus comme intersection du cercle trigonométrique (centre O et rayon 1) et du cercle centré au point $A = (1, 0)$ et de rayon 1.

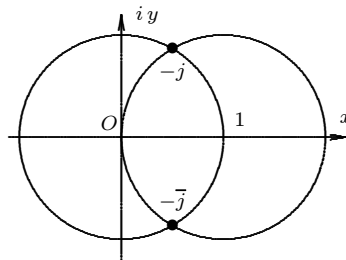


FIG. 1.8 – Les solutions α possibles.

Nous en déduisons que les seules solutions de (1) sont $\mathcal{R} = \{0, 1, -j, -j^2\}$.

Exercice type d'oral, assez délicat.

1.2.c Factorisation dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$

Cf. tome 1 - théorème 1.15 à 1.18 : pages 185 à 187.

Exercice 1.11

Soit le polynôme $P = X^5 - (X - 1)^5$.

1. Peut-on, sans les calculer, déterminer le nombre des zéros de P . Déterminer une propriété géométrique des points du plan d'Argand-Cauchy représentant les zéros de P .

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

On sera amené à déterminer les valeurs exactes de $\cotan \frac{k\pi}{5}$, pour $k = 1..4$.

2.2.c Transposée d'un produit**Théorème 2.5**

|| Nous avons ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$, pour tout A de $\mathfrak{M}_{p,n}$ et pour tout B de $\mathfrak{M}_{n,q}$.

Preuve :

Le produit AB est une matrice de $\mathfrak{M}_{p,q}$, donc ${}^t(AB)$ est une matrice de $\mathfrak{M}_{q,p}$.

Il suffit de présenter les calculs de ${}^tB {}^tA$ et de constater le résultat avec la définition du produit de deux matrices.

$$\begin{array}{c|c}
 & {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{pk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \\
 \hline
 {}^tB = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1q} & \cdots & b_{kq} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix} & {}^tB {}^tA = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ \cdots & c'_{ji} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik} & \cdots & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Il est clair que ${}^tB {}^tA = \left(c'_{ji} \right)_{j=1..q, i=1..p}$ n'est autre que la transposée de $AB = (c_{ij})_{i=1..p, j=1..q}$. ■

2.2.d Matrices symétriques et anti-symétriques**Définition 2.2**

Une matrice carrée S est dite *symétrique* si $S = {}^tS$.
 Une matrice carrée A est dite *anti-symétrique* si $A = -{}^tA$.

Exercice 2.8

Etablir que le produit de deux matrices symétriques A et B est une matrice symétrique si et seulement si A et B commutent.

Corrigé :

Immédiat en remarquant que

$${}^t(AB) = \begin{cases} AB \\ {}^tB {}^tA = BA \end{cases}$$

On pourra vérifier sur le contre exemple ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

que la condition est bien nécessaire

Exercice 2.9

$$x \in \mathbb{R}^*, \text{ soit la matrice } X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

Ainsi si $\mathcal{B}_{\mathbb{F}} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_j, \dots, \vec{f}_p)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{G}} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \dots, \vec{g}_q)$ sont deux bases de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ alors par définition des sous espaces supplémentaires tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = a_1 \vec{f}_1 + \dots + a_j \vec{f}_j + \dots + a_p \vec{f}_p + b_1 \vec{g}_1 + \dots + b_k \vec{g}_k + \dots + b_q \vec{g}_q. \quad (4.3)$$

Nous en déduisons que la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{G}}$

$$(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_j, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \dots, \vec{g}_q)$$

est une base de $\mathbb{E}$.

Ce théorème sera beaucoup utilisé, notamment en utilisant le corollaire qui suit. ■

Corollaire 4.1

Deux sous espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$, du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}$, sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ si et seulement si la juxtaposition d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ est une base de $\mathbb{E}$.

Preuve :

La condition est nécessaire d'après le théorème précédent.

Elle est suffisante d'après l'écriture (4.3). ■

Exercice 4.9

Soit $\mathbb{F} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{ tels que } P(1) = 0\}$, où $\mathbb{R}_2[X]$ désigne les polynômes réels de degré inférieur à 2.

1. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la dimension de $\mathbb{F}$ et indiquer une base de $\mathbb{F}$.
2. Déterminer $\mathbb{G}$ tel que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.
3. $\mathbb{G}$ est-il unique ?

Corrigé :

Nous rappelons que $\dim \mathbb{F} \leq \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, d'après le **théorème 4.9** et nous rapportons $\mathbb{R}_2[X]$ à sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$.

1. $\mathbb{F}$ est non vide car il contient le polynôme identiquement nul

$$P = 0 * 1 + 0 * X + 0 * X^2.$$

Si $(P, Q) \in \mathbb{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$, ce qui prouve que $\mathbb{F}$ est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Si nous écrivons $P = a * 1 + b * X + c * X^2$ alors

$$P \in \mathbb{F} \Leftrightarrow a + b + c = 0,$$

ce qui représente une équation de $\mathbb{F}$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

Cette équation est un système homogène d'une équation à trois inconnues de rang 1, donc ayant deux paramètres auxiliaires, nous en déduisons

$$a = -\lambda - \mu, \quad b = \lambda \text{ et } c = \mu,$$

ce qui prouve que les vecteurs de $\mathbb{F}$ s'expriment de manière unique sous la forme

$$P \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \begin{cases} P = (-\lambda - \mu, \lambda, \mu) = \lambda (-1, 1, 0) + \mu (-1, 0, 1) \\ = -\lambda - \mu + \lambda X + \mu X^2. \end{cases}$$

Nous en déduisons que $\dim \mathbb{F} = 2$, nous pouvons écrire $\mathcal{B}_{\mathbb{F}} = (P_1 = -1 + X, P_2 = -1 + X^2)$.

ce qui permet de regrouper $P(x+k)$

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}P(x) &= C_n^0(-1)^{n-1}P(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} (C_n^{k-1} + C_n^k) P(X+k) \\ &\quad + C_n^n(-1)^0 P(x+n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k P(X+k),\end{aligned}$$

en utilisant la formule de **Pascal - Tartaglia** $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

4.5 Somme directe de sous espaces vectoriels

Etude des images et noyaux des itérés d'un endomorphisme.

Notations valables pour tout le problème.

* n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On notera $\vec{0}$ le vecteur nul de $\mathbb{E}$, I_d l'application identique de $\mathbb{E}$ et θ l'application qui à tout vecteur de $\mathbb{E}$ associe $\vec{0}$.

* f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, $\text{Im } f$ désigne son image et $\ker f$ son noyau.

* On pose $f^0 = \text{id}$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $f^k = f \circ f^{k-1}$.

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{E}$, il existe un entier p qui vérifie

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ \mathbb{E} = \ker f^p \oplus \text{Im } f^p. \end{cases} \quad (4.33)$$

(le symbole $\oplus$ signifie que la somme des sous espaces vectoriels est directe).

1. Dans cette question, f est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{E}$.

Donner une valeur de p satisfaisant (4.33).

Justifier la réponse.

2. Exemple 1.

Dans cette question $n = 3$ et $\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\text{Im } f$. Peut-on choisir $p = 1$?

b) Déterminer une base de $\ker f^2$ et une base de $\text{Im } f^2$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E} = \ker f^2 \oplus \text{Im } f^2$.

3. Exemple 2.

Dans cette question $n = 4$ et $\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, m est un paramètre réel et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.8 : classique d'oral

Les deux questions qui suivent sont indépendantes ; $\dim \mathbb{E} = n$.

1. Si f et g sont deux endomorphismes de l'espace vectoriel réel $\mathbb{E}$ vérifiant

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

alors

$$\ker f \oplus \operatorname{Im} g = \mathbb{E} \text{ et } \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g.$$

2. Si f et g sont deux endomorphismes de l'espace vectoriel réel $\mathbb{E}$ alors

$$\ker f = \ker g \circ f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Im} f + \ker g = \mathbb{E}. \quad (5.4)$$

Remarquer que si $f = g$ nous retrouvons l'exercice 5.3.

Corrigé :

Il faut pour ces deux exercices utiliser les hypothèses et bien connaître les définitions de noyau, image, somme directe, compositions d'endomorphisme et la loi du rang.

1. Le point de départ est $f \circ g \circ f = f$ que nous écrivons $f \circ (g \circ f - id) = \theta$, où θ est l'application nulle.

Pour tout $x \in \mathbb{E}$

$$f \circ (g \circ f - id)(x) = \theta(x), \text{ soit } f[g \circ f(x) - x] = 0, \quad (5.5)$$

ce qui exprime que le vecteur $y = g \circ f(x) - x \in \ker f$.

Il est clair que $z = g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$.

En conclusion :

Pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe $y \in \ker f$ et $z \in \operatorname{Im} g$ tels que

$$x = y + z, \quad (5.6)$$

ce qui exprime que

$$\ker f + \operatorname{Im} g = \mathbb{E}.$$

Il reste à prouver l'unicité de la décomposition (5.6).

Si $t \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$ alors

$$f(t) = 0 \text{ et } \exists u \in \mathbb{E} \text{ tel que } t = g(u). \quad (5.7)$$

Nous en déduisons que $f(t) = f \circ g(u) = 0$.

La deuxième relation de l'énoncé (il faut bien l'utiliser, car elle est donnée) peut s'écrire de manière analogue à (5.5)

$$g \circ (f \circ g - id)(u) = \theta(u), \text{ soit } g[f \circ g(u) - u] = 0,$$

pour le vecteur u introduit au (5.7).

Compte tenu de $f \circ g(u) = 0$, nous en déduisons

$$g(u) = t = 0,$$

ce qui prouve que $\ker f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.

La deuxième proposition résulte de la loi du rang, cf. **théorème 5.6 : page 160** et d'une "astuce".

f et g ont des "rôles" symétriques donc

$$\ker g \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{E}.$$

Nous en déduisons

$$\dim(\ker g) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{E}$$

et la loi du rang pour g donne

En d'autres termes la vecteur colonne X est une solution non nulle du système homogène $(M - \lambda I) X = O$, ce qui impose $\text{rang}(M - \lambda I) < n$.

Nous noterons Spec_M l'ensemble des valeurs propres de la matrice M .

Il faut retenir que si M est la matrice d'un endomorphisme φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$ alors les valeurs propres de φ sont identiques aux valeurs propres de M et les sous espaces propres de φ sont identiques aux sous espaces propres de M .

Théorème 6.7

Les valeurs propres λ et les sous espaces propres SEP_λ de la matrice M sont déterminés en exprimant que

$$\text{rg}[(M - \lambda I) X] \leq n - 1,$$

où I est la matrice unité d'ordre n et X la matrice colonne formée des n lignes $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ représentant les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

D'après la **définition 6.4**, les valeurs propres de M sont obtenues en exprimant que le système homogène

$$(M - \lambda I) X = O$$

de n équations à n inconnues admet au moins une solution non triviale.

Or ce système admet des solutions autres que la solution triviale si et seulement si son rang est inférieur ou égal à $n - 1$.

Ainsi la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de M consiste à réduire la matrice $M - \lambda I$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes, cf. **tome 1 - théorème 5.1 : page 117, en n'oubliant jamais de respecter les règles.**

On détermine dans un premier temps les valeurs propres, puis pour chacune des valeurs propres déterminées (attention : si elles existent), le système homogène $(M - \lambda I) X = O$ donne des équations des sous espaces propres associés. ■

6.2.b Valeurs propres d'une matrice d'ordre 2 ou 3

La méthode que nous exposons, basée sur les déterminants d'ordre 2 et 3 (non officiellement au programme de BCPST) peut ne pas être utilisée, en effet nous donnerons dans la suite une méthode générale qui ne fait pas intervenir les déterminants.

Théorème 6.8 : matrice d'ordre 2

Les vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ de $\mathbb{K}^2$ sont linéairement dépendants si et seulement

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

Preuve :

Le théorème est évident si au moins un des vecteurs est nul.

Supposons $a \neq 0$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants alors il existe k tel que $\vec{v} = k \vec{u}$, ce qui implique $c = ka$ et $d = kb$, d'où

$$ad - bc = kab - kab = 0.$$

Réciproquement, nous pouvons toujours poser $c = ka$ et nous en déduisons

$$ad - bc = a(d - kc) = 0,$$

Exercice 6.31

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices inversibles M telles que

$${}^t M J M = J, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide.

Montrer que si M et N sont deux éléments de $\mathcal{E}$ alors MN est aussi un élément de $\mathcal{E}$.

Montrer que si M est un élément de $\mathcal{E}$ alors l'inverse M^{-1} de M est aussi un élément de $\mathcal{E}$.

Indication :

Revoir l'inverse d'une matrice **tome 1 : page 129** ou **§ 3.3 : page 74** et les matrices semblables **§ 5.3.b : page 187**. ★

Corrigé :

La matrice unité I d'ordre 3 est un élément de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est non vide.

Nous avons

$$\begin{aligned} {}^t(MN) J (MN) &= {}^t N ({}^t M J M) N && \text{car } {}^t(MN) = {}^t N {}^t M \\ &= {}^t N J N && \text{car } {}^t M J M = J \text{ par hypothèse} \\ &= J && \text{par hypothèse,} \end{aligned} \quad (6.38)$$

ce qui exprime que le produit des matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{E}$.

Si N est l'inverse de M alors en posant $MN = I$ dans (6.38)

$$\begin{aligned} {}^t(MN) J (MN) &= J && \text{car } MN = I \\ &= {}^t N J N && \text{car } {}^t M J M = J \text{ par hypothèse,} \end{aligned}$$

ce qui prouve que N est un élément de $\mathcal{E}$.

Ces propriétés établissent que $\mathcal{E}$ est un groupe pour le produit des matrices.

6.5 Matrices stochastiques

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux.

On note $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre^{#10} des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité.

Pour tout élément M de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et p , on note $a_{i,j}(M)$ le coefficient de M situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Une matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $a_{ij}(M) \geq 0$, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et p .
2. $\sum_{j=1}^p a_{ij}(M) = 1$, pour tout entier i compris entre 1 et p .

Les matrices stochastiques sont utilisées en probabilité.

^{#10} Cela veut dire qu'il est possible de faire des opérations algébriques sur $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, comme l'addition de deux matrices, la multiplication de deux matrices et le produit d'un réel et d'une matrice. Ces opérations définissent en particulier une structure d'espace vectoriel et d'anneau unitaire (non commutatif).

Nous proposons quelques exercices de divertissement ...

Exercice 7.7 : une proposition d'oral : INA PG

On donne un réel a différent de -1 , 1 et 0 .

Dans le plan rapporté au repère orthonormé Oxy , nous considérons les points $A = (1, 1)$, $B = (a, a^2)$ et $C = (-a^2, a)$.

Etablir que les points A , B et C sont distincts.

Quelle particularité a-t-on pour $a = -1$?

Déterminer lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice Δ du segment $[BC]$.

Indication :

Cf. tome 1 - équations barycentriques, paramétriques et cartésiennes d'une droite : page 70. ★

Corrigé :

A et B ne peuvent être confondus que si $a = 1$, ce qui est exclu.

A et C sont distincts pour toute valeur de a .

B et C sont ne peuvent être confondus que si $a = 0$, ce qui est exclu.

Si $a = -1$ alors $B = (-1, 1)$ et $C = (-1, -1)$, ce qui exprime que B et C sont symétrique par rapport à l'axe Ox .

L'équation vectorielle de la droite (AB) est

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui donne les équations paramétriques

$$\begin{cases} x - 1 = \lambda (a - 1) \\ y - 1 = \lambda (a^2 - 1) \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous en déduisons, par quotient, une équation cartésienne de (AB)

$$(a + 1) x - y - a = 0. \quad (7.4)$$

Remarquer que cette droite ne peut être parallèle à l'axe Ox .

Nous partons de la définition d'une médiatrice

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2,$$

ce qui donne pour équation cartésienne

$$(x - a)^2 + (y - a^2)^2 = (x + a^2)^2 + (y - a)^2,$$

soit après réduction

$$(a + 1) x + (a - 1) y = 0. \quad (7.5)$$

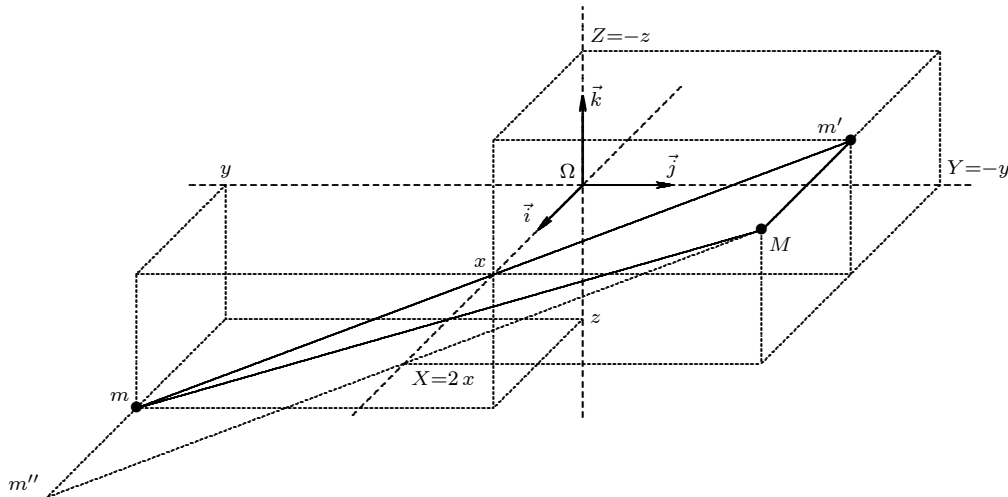
Le système formé de (7.4) et (7.5) donne les coordonnées cartésiennes du point M d'intersection de (AB) et Δ .

$$\begin{cases} (a + 1) x - y = a \\ (a + 1) x + (a - 1) y = 0 \end{cases}$$

En retranchant la première ligne à la seconde, nous obtenons

$$y = -1 \text{ et donc } x = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc la droite d'équation $y = -1$, privée des points $M_1 = (0, -1)$ et $M_0 = (-1, 1)$.

FIG. 7.12 – Représentation de m , $m' = s(m)$, $m'' = a(m)$ et $M = f(m)$.**Exercice 7.20**

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de coordonnées x, y et z dans l'espace géométrique qui vérifient l'équation

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1. \quad (E)$$

1. Etudier l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + 2z = 0$, en la décrivant complètement.
2. Ecrire l'équation de (E) sous la forme

$${}^t u A u = 1$$

où u désigne le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

et ${}^t u$ sa transposée, en explicitant la matrice symétrique A .

3. Caractériser le noyau et l'image de l'application linéaire représentée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, en précisant une base de chacun de ces sous-espaces.
4. Déterminer les valeurs propres de A . Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?
5. Diagonaliser A avec une matrice de passage orthogonale.
6. Comment s'écrit l'équation de (E) dans les coordonnées du nouveau repère ainsi construit ?
7. Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{E}$. Que représente l'intersection étudiée en 1. ?

GE2 - 1999 : Exercice 1

Corrigé :

1. Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{P}$, il suffit de remplacer y par $-2z$ dans l'expression de f .

$$x^2 + 25z^2 + 10xz - 1,$$

ce qui après réduction donne

$$\theta^2(x) = \frac{1}{2 \left[\sqrt{1+x^2} + 1 \right]}.$$

Nous en déduisons que la limite de $\theta^2(x)$ est égale à $\frac{1}{4}$ pour x tendant vers 0.

$\theta(x)$ étant positif, sa limite est $\frac{1}{2}$.

Résultat connu, car la courbe représentative de f est une parabole, cf. **tome 1 - exercice 7.18 : page 331**.

8.3.e Fonctions trigonométriques et inverses

Il faut bien connaître les fonctions trigonométriques et inverses, leurs propriétés, les courbes représentatives et leurs dérivées, cf. tome 1 - § 6.5 : page 296 et § 7.2.d.iv : page 321.

Exercice 8.21

Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(3 \arctan x) = \frac{1 - 3x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad (8.20)$$

$$2 \cos^2\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (8.21)$$

Indication :

Pour (8.20), poser $\theta = \arctan x$ et exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$. ★

Corrigé :

La première idée est d'utiliser les dérivées, par exemple pour

$$f(x) = \cos(3 \arctan x) = \frac{1 - 3x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{1+x^2} \sin(3 \arctan x) \\ &= -\frac{6x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} - \frac{3x(1-3x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = -\frac{1}{1+x^2} \varphi(x), \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varphi(x) = \frac{3x(3+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Ce qui n'apporte pas grand chose dans la voie de la preuve.

Nous savons que

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta,$$

formule qui peut être retrouvée avec la formule de **De Moivre**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \begin{cases} \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{cases}$$

et en identifiant partie réelle et partie imaginaire.

Exercice 8.28 : suite d'Euler - Maschéroni

Montrer que les deux suites u et v de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \ln n,$$

définies pour $n \geq 1$ sont adjacentes (Il n'est pas demandé d'en déterminer la limite commune qui vaut $\gamma = 0,577\dots$)

Corrigé :

Montrons que la suite u est croissante

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Pour déterminer le signe de $u_n - u_{n-1}$, nous étudions la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$.

f est dérivable et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

ce qui implique que la fonction f est croissante. Nous en déduisons que $f(x) \geq 0$ pour tout x car $f(0) = 0$.

Ce résultat prouve que la suite u est croissante, car il suffit de remplacer x par $\frac{1}{n}$ dans f .

Montrons que la suite v est décroissante

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Pour déterminer le signe de $v_n - v_{n-1}$, nous étudions la fonction $g(x) = x - \ln(1-x)$ pour $0 \leq x < 1$.

g est dérivable et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x},$$

ce qui implique que la fonction g est décroissante. Nous en déduisons que $g(x) \leq 0$ pour tout x car $g(0) = 0$.

Ce résultat prouve que la suite v est décroissante, car il suffit de remplacer x par $\frac{1}{n}$ dans g .

Il est immédiat que

$$v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

admet pour limite 0.

Cela résulte de la continuité de la fonction logarithme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \ln \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \ln 1 = 0.$$

Il est possible, à l'aide d'un ordinateur, de montrer que cette suite converge lentement.

La limite commune, appelée constante d'**Euler - Maschéroni** a pour valeur approchée

$$\gamma = 0,5772156649015328606065120900824024310421\dots$$

Théorème 9.2

Si l'intégrale impropre $A = \int_a^b f(x) dx$, avec a et b finis ou non, est **convergente** alors pour tout changement de variable $u = u(x)$, qui transforme cette intégrale impropre en une intégrale définie, son calcul est obtenu de manière directe avec la nouvelle intégrale $A = \int_\alpha^\beta \varphi(u) du$, avec $\alpha = u(a)$ et $\beta = u(b)$.

Preuve :

Les deux exercices précédents sont un début de preuve.

Attention : il est nécessaire de montrer qu'une intégrale impropre converge avant de la calculer, c'est dans cet ordre ^{#1}. ■

Exercice 9.4 : intégrale de Frullani**1. Etude d'une limite.**

a) Soit φ la fonction définie sur $\mathcal{I} =]0, +\infty[$ par

$$\varphi(t) = \frac{t-1}{t \ln t}, \text{ si } t \neq 1 \text{ et } \varphi(1) = 1.$$

Montrer que φ est continue sur $\mathcal{I}$.

b) Soit la fonction g définie sur $\mathcal{I} \setminus \{1\}$ par l'intégrale

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}.$$

Dire pourquoi g existe.

Calculer l'intégrale et montrer que g est constante.

c) Soit la fonction f définie sur $\mathcal{I} \setminus \{1\}$ par l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Exprimer $f(x)$ à l'aide $g(x)$ et de l'intégrale $\int_x^{x^2} \varphi(t) dt$. On ne cherchera pas à calculer $f(x)$.

Montrer que $f(x)$ admet une limite l , que l'on déterminera, lorsque $x \rightarrow 1$.

2. Etude d'une fonction.

Nous considérons la fonction f définie sur $\mathcal{J} = [0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

de courbe représentative Γ dans le repère Oxy .

a) Montrer que f est continue sur $\mathcal{J}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{J} \setminus \{0, 1\}$ et calculer $f'(x)$.

c) Etude de f' en $x = 1$.

Montrer que f' admet un développement limité à l'ordre 1 en $x = 1$.

En déduire que f est dérivable en $x = 1$ et donner la valeur de $f'(1)$.

Donner la position de Γ par rapport à sa tangente dans un voisinage de $x = 1$.

On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 de f pour $x = 1$.

^{#1}Tout ce qui brille n'est pas or, vieux dicton paysan.

ce qui donne

$$\begin{aligned} x^2 y'' - (\alpha + \beta - 1) x y'_x + \alpha \beta y &= (x^2 y''_x + x y'_x) - (\alpha + \beta) x y'_x + \alpha \beta y \\ &= y''_{t^2} - (\alpha + \beta) y'_t + \alpha \beta y = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants, dont la résolution est un classique.

En conclusion, les solutions sont

$$\begin{cases} y(x) = A x^\alpha + B x^\beta & \text{si } \alpha \neq \beta \\ y(x) = (A \ln x + B) x^\alpha & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Remarquer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

10.1.b Equations différentielles non linéaires

Exercice 10.8

Intégrer l'équation différentielle

$$y'' = \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (10.8)$$

Indication :

Poser $y' = z$ et en déduire (c'est une primitive classique) $\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$.

Nous rappelons que c'est une chaînette, cf. **tome 1 : exercice 9.2 : page 373. ★**

Corrigé :

Avec $z = y'$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre

$$z' = \sqrt{1 + z^2} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{2},$$

ce qui (dictionnaire des primitives, cf. **tome 1 : page 406**) donne

$$\ln \left| z + \sqrt{1 + z^2} \right| = \frac{x}{2} + \ln |C| \Leftrightarrow z + \sqrt{1 + z^2} = C e^{x/2}.$$

En isolant la radical et en élevant au carré

$$1 + z^2 = \left(C e^{x/2} - z \right)^2 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \left(C e^{x/2} - \frac{1}{C} e^{-x/2} \right),$$

nous en déduisons y par intégration

$$y(x) = C e^{x/2} + \frac{1}{C} e^{-x/2} + D,$$

avec C et D constantes arbitraires, avec $C \neq 0$.

L'ensemble des solutions de (10.8) sont

$$\mathbb{S} = \left\{ y(x) = C e^{x/2} + \frac{1}{C} e^{-x/2} + D, \text{ avec } (C, D) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}.$$

Il est aussi possible de “bricoler” et écrire (10.8) sous la forme

$$\frac{y'' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{2} y' \Leftrightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2} y + C = 2 y'',$$

ce qui donne l'équation différentielle du second ordre

$$4 y'' - y = K,$$

et donne le résultat

$$y(x) = A e^{2x} + B e^{-2/x} - K.$$

En portant dans (10.8), nous avons la condition $A B = 1$.

En première lecture, ne retenir que la définition d'un domaine simple de $\mathbb{R}^2$, puis après avoir vu tout ce chapitre, voir l'extension à $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 3$.

Définition 12.6 : domaine fermé simple de $\mathbb{R}^2$

Nous appelons domaine fermé simple de $\mathbb{R}^2$, tout sous ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par des inéquations de la forme

$$a \leq x \leq b \text{ et } \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues sur $[a, b]$.

$\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ compris entre les courbes $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$, $x = a$ et $x = b$. Nous notons $\partial\mathcal{D}$ la frontière (courbes limitant le domaine) de $\mathcal{D}$.

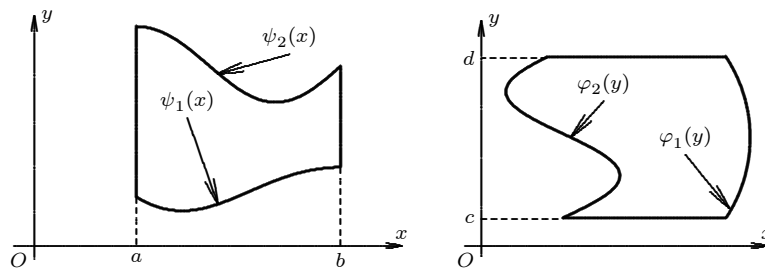


FIG. 12.2 – Deux domaines simples.

Les variables x et y peuvent être interverties et le domaine $\mathcal{D}$ peut aussi être défini par les inéquations de la forme

$$c \leq y \leq d \text{ et } \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y),$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions continues sur $[c, d]$.

Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux domaines simples tels que $\mathcal{D}_2$ soit strictement inclus dans $\mathcal{D}_1$ alors par extension $\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$ est encore appelé domaine simple noté $\mathcal{D}$.

Définition 12.7 : domaine fermé simple de $\mathbb{R}^3$

Nous appelons domaine fermé simple de $\mathbb{R}^3$, tout sous ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe un intervalle fermé $[z_1, z_2]$ pour lequel si $z \in [z_1, z_2]$ alors le domaine $\mathcal{D}(z)$ projection sur le plan Oxy de la section de $\mathcal{V}$ par le plan de cote z est un domaine fermé simple de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple $\mathcal{V}$ peut être défini par les inéquations

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \text{ et } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

où y_1 et y_2 sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et z_i , avec $i = 1..2$, continue dans le domaine $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$.

Il est évidemment possible d'échanger les variables x, y et z .

en imposant $\theta \in [0, 2\pi[$.

La partie délicate est de vérifier la correspondance biunivoque entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$. ■

Exercice 13.6

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy,$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine $\{x^2 + y^2 - 2ax \leq 0\}$, avec a réel strictement positif.

Corrigé :

Nous utilisons deux changements de variable en coordonnées polaires.

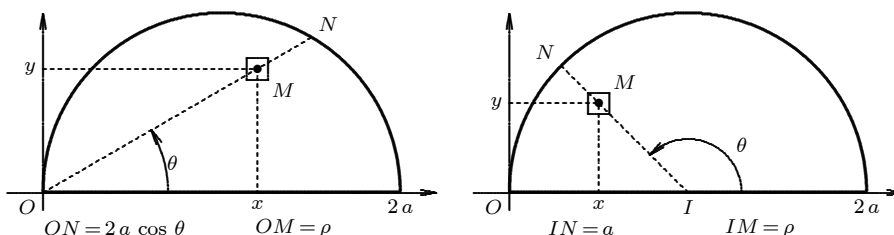


FIG. 13.8 – Représentation de deux changements de variables.

1^{er} changement (figure de gauche) :

Pour $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ le domaine $\mathcal{D}$ est transformé biunivoquement en le domaine $\mathcal{T}$ défini par

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta \right\}.$$

En utilisant la symétrie, nous en déduisons que

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 d\rho = 8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta.$$

Il suffit alors de linéariser $\cos^4 \theta$

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 2 \cos 2\theta + 3) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} I &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4\theta + 2 \cos 2\theta + 3) d\theta \\ &= a^4 \left[\frac{\sin 4\theta}{4} + \sin 2\theta + 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

2^{ème} changement (figure de droite) :

Pour $x = a + \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ le domaine $\mathcal{D}$ est transformé biunivoquement en le domaine $\mathcal{T}'$ défini par

$$\{0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq \rho \leq a\}.$$

Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes finies

Il est conseillé de revoir le cours de 1^{ère} année sur les probabilités, cf. **tome 1 : pages 547 à 618**.

Nous donnons dans ce chapitre quelques compléments et exercices de révision.

14.1 Fonction de transfert

Nous considérons dans ce chapitre et le suivant un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \Pr)$, où Ω est un ensemble dénombrable, cf. **tome 1 - définition 4.3 : page 548** et nous rappelons le théorème de transfert dans le cas d'une fonction φ à p variables.

Théorème 14.1 : dit de transfert

φ désignant une fonction quelconque de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
 X_i une **v.a.d** telle que $X_i(\Omega) = 1..n_i$, pour $i = 1..p$, et k entier naturel fixé.
Le moment d'ordre k de la **v.a.d** $Z = \varphi(X_1, \dots, X_p)$ est

$$\mathbb{E}[Z^k] = \mathbb{E}[\varphi^k(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p)]$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_j=1}^{n_i} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} \varphi^k(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}, \dots, x_{i_p}) \Pr \left[\bigcap_{i=1}^p (X_i = x_{i_j}) \right].$$

Preuve :

La preuve pour $p = 2$ a été faite au **tome 1 : page 573**, elle est identique pour p quelconque.

L'importance de ce théorème tient au fait que si $Z = \varphi(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p)$ est un changement de variables aléatoires, il n'est pas nécessaire de connaître la loi de Z pour en déterminer son moment $\mathbb{E}[Z^k]$ d'ordre k . ■

14.2 Ensemble - Analyse combinatoire

Exercice 14.1 : partitions d'un ensemble

Quel est le nombre $S(n, p)$ de partitions d'un ensemble fini E , ayant $n \geq 1$ éléments, formées de $p \geq 1$ parties de E ?

Montrer que

$$S(n, p) = S(n-1, p-1) + p S(n-1, p),$$

pour $n \geq p \geq 2$, avec $S(n, 1) = 1$ pour $n \geq 1$.

Indication :

Rapprocher cet exercice du **problème 20.1 : page 250 du livre de problèmes BPCST VETO 1^{ère} année**.

On notera $(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k)$ une k -partition formée de k parties d'un ensemble E_{n-1} ayant $n-1$ éléments et on dénumbrera toutes les partitions qui lui sont associées lorsqu'on ajoute à E_n un élément e_n . ★

Exercice 14.14

n , m , p et b entiers strictement positifs tels que $m+p+b \geq n$, on notera $N = m+p+b$. Pour le passage en 2^{ème} année de **BCPST**, les élèves doivent répondre à n questions tirées au sort parmi m questions de Mathématiques, p questions de Physique - Chimie et b questions de Biologie.

Soit M la v.a.d égale au nombre de questions de Mathématiques, P la v.a.d égale au nombre de questions de Physique-Chimie et B la v.a.d égale au nombre de questions de Biologie.

1. Etablir que $M + P + B = \text{Cste}$.
2. Définir la loi du couple (M, P) et en déduire les lois marginales.
3. Donner la loi de probabilité conditionnelle $M | P = j$, pour j fixé.

Corrigé :

1. Il est évident que

$$M + P + B = n$$

2. Le tirage est fait sans remise, donc les v.a.d M et P sont dépendantes.

Une éventualité est formé de n questions parmi les N possibles

$$\text{Card } \Omega = \binom{N}{n}.$$

L'événement $(M = i \cap P = j)$ exprime que nous avons tiré i questions de Mathématiques parmi m , j questions de Physique - Chimie parmi p et $n - i - j$ questions de Biologie

$$\text{Card } (M = i \cap P = j) = \binom{m}{i} \binom{p}{j} \binom{b}{n-i-j}.$$

Nous en déduisons la loi du couple (M, P)

$$\Pr (M = i \cap P = j) = \frac{\binom{m}{i} \binom{p}{j} \binom{b}{n-i-j}}{\binom{N}{n}},$$

sans oublier la convention $\binom{k}{l} = 0$ si $l \neq 0..k$.

Nous vérifions avec la formule de **Van der Monde**, cf. **tome 1 - théorème 3.9 : page 542**, appliquée à une partition en 3 sous ensemble, que la somme des probabilités est 1.

La loi marginale est

$$\begin{aligned} \Pr (M = i) &= \sum_j \Pr (M = i \cap P = j) \\ &= \frac{\binom{m}{i}}{\binom{N}{n}} \sum_j \binom{p}{j} \binom{b}{n-i-j} = \frac{\binom{m}{i} \binom{p+b}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \end{aligned}$$

c'est toujours **Van der Monde**.

De même

$$\Pr (P = j) = \frac{\binom{p}{j} \binom{m+b}{n-j}}{\binom{N}{n}}.$$

Définition 14.1

$(\Omega, \mathcal{T}, \text{Pr})$ un espace probabilisé fini. X une **v.a.d** telle que $X(\Omega) = 0..n$.

La fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n \text{Pr}(X = k) t^k,$$

est appelée fonction génératrice associée à la **v.a.d** X .

Nous admettons que la fonction génératrice $G_X(t)$ caractérise la **v.a.d** X .

Ne pas confondre la **fonction génératrice** et la **fonction caractéristique** qui est $\mathbb{E}(e^{tX})$, cf. **tome 1 exercice 6.4 : page 597** et la suite.

Cette définition est applicable aux espaces probabilisés dénombrables (non finis).

Dans ce cas la fonction génératrice est la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \text{Pr}(X = k) t^k$, qui n'est

plus dans le nouveau programme de **BCPST-VETO**. Toutefois, avec des indications, en considérant que t est fixé, nous obtenons une série numérique qui est au programme (toujours avec des indication dans la majorité des cas), cf. **§ 15.2.c : page 627**.

14.7.b Propriétés**Théorème 14.4**

Si G_X est la fonction génératrice de la **v.a.d** X telle que $X(\Omega) = 0..n$ alors

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) \text{ et } \mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1).$$

Nous en déduisons que $\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$.

Preuve :

La fonction génératrice $G_X(t) = \sum_{k=0}^n \text{Pr}(X = k) t^k$ est un polynôme en t de degré n , donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$G'_X(t) = \sum_{k=0}^n k \text{Pr}(X = k) t^{k-1},$$

nous pouvons sommer à partir de 1, ou sommer à partir de 0.

Nous en déduisons que l'espérance de X est $G'_X(1)$.

En dérivant une deuxième fois

$$G''_X(t) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \text{Pr}(X = k) t^{k-2},$$

nous pouvons sommer à partir de 2, ou sommer à partir de 0.

Nous en déduisons que l'espérance de $X(X-1)$ est $G''_X(1)$. ■

Théorème 14.5

Si X et Y sont deux **v.a.d** indépendantes telles que $X(\Omega) = 0..n$ et $Y(\Omega) = 0..m$ alors

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

Preuve :

$Z = X + Y$ est une **v.a.d** telle que $Z(\Omega) = 0..(n+m)$ et nous avons

$$G_Z(t) = \sum_{k=0}^{m+n} \text{Pr}(Z = k) t^k$$

Les tirages étant effectués avec remise (donc indépendants) nous avons

$$\begin{aligned}\Pr(X = k) &= \Pr(R_1) \Pr(R_2) \cdots \Pr(R_{k-1}) \Pr(B_1) \\ &= p q^{k-1}.\end{aligned}$$

C'est ce résultat qui est à l'origine du nom loi géométrique car la suite $(\Pr(X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme p et de raison q .

Nous contrôlons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Pr(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1,$$

en utilisant (15.2) pour $n = 0$. ■

Définition 15.2

La **v.a.d** Y égale au nombre d'échecs précédant le 1^{er} succès pour obtenir la première boule blanche est une loi géométrique (que nous qualifions de négative) de paramètre p .
Nous notons $Y \odot \mathcal{J}(p)$ et nous retenons que $Y = X - 1$.

Théorème 15.2

Si $Y \odot \mathcal{J}(p)$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\Pr(X = k) = p q^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $p + q = 1$ et $0 < p < 1$.

Preuve :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ car les tirages sont effectués avec remise et qu'une boule blanche peut être tirée 1^{er} tirage.

L'événement $(Y = k)$ représente les tirages formés d'une succession de k boules rouges et d'une boule blanche obtenue au $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage.

Une éventualité est

$$\omega = (R_1 R_2 \cdots R_k B_1)$$

représentant la suite ordonnée des tirages des k boules rouges et (enfin) de la boule blanche.

Les tirages étant effectués avec remise (donc indépendants) nous avons

$$\begin{aligned}\Pr(Y = k) &= \Pr(R_1) \Pr(R_2) \cdots \Pr(R_k) \Pr(B_1) \\ &= p q^k.\end{aligned}$$

Nous contrôlons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Pr(Y = k) = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1,$$

en utilisant (15.2) pour $n = 0$. ■

15.2.b Moments

Théorème 15.3

Si $X \odot \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{q}{p^2}$.

Preuve :

Nous avons

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \Pr(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$

en utilisant (15.2) pour $n = 1$.

15.4.c Moments.**Théorème 15.16**Si $X \circ \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$E[X] = V[X] = \lambda.$$

Preuve :

Par définition

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pr(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda, \quad \text{d'après (15.21).} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} E[(X-1)X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k-1)k \Pr(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2, \quad \text{d'après (15.21)} \end{aligned}$$

et ainsi $V[X] = E[(X-1)X] + E[X] - (E[X])^2 = \lambda$. ■**15.4.d Valeurs modales****Théorème 15.17**Les valeurs modales^{#5} de la loi de Poisson $X \circ \mathcal{P}(\lambda)$ sont

$$\begin{cases} [\lambda] & \text{si } \lambda \notin \mathbb{N} \\ \lambda \text{ et } \lambda - 1 & \text{si } \lambda \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Preuve :

Les valeurs modales sont obtenues en déterminant le zéro de la fonction

$$f(k) = 1 - \frac{\Pr(X = k-1)}{\Pr(X = k)},$$

soit pour la loi Poisson $X \circ \mathcal{P}(\lambda)$

$$f(k) = \frac{\lambda - k}{\lambda}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{N}$ alors il y a deux valeurs modales λ et $\lambda - 1$ sinon une seule $[\lambda]$, partie entière de λ . ■**15.4.e Somme de deux lois de Poisson****Théorème 15.18**Si $X_1 \circ \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \circ \mathcal{P}(\lambda_2)$ sont deux lois de Poisson indépendantes alors $X = X_1 + X_2 \circ \mathcal{P}(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2)$.

^{#5} k est une valeur modale si $\Pr(X = k) \geq \Pr(X = i)$, pour tout $i \in X(\Omega)$.

Pour a et b réels (finis), nous avons la même définition si l'intervalle est ouvert, ou semi-ouvert.

Nous ne ferons pas de différence entre $\mathcal{U}_{a,b[}$ et $\mathcal{U}_{[a,b]}$.

16.2.b Représentation de la loi uniforme

Théorème 16.6

La fonction de répartition de la loi uniforme $X \odot \mathcal{U}_{[a,b]}$ est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Preuve :

Immédiat. ■

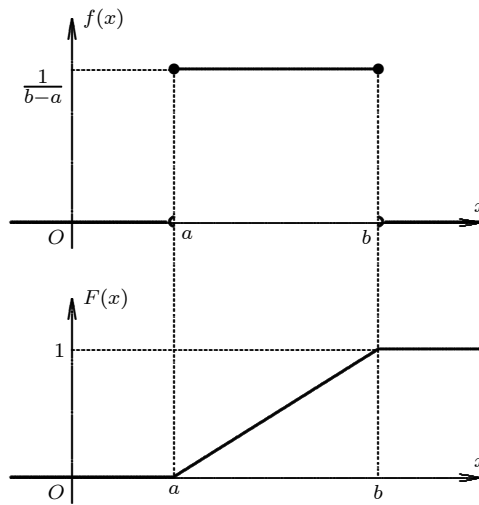


FIG. 16.2 – Représentation de la densité f et de la répartition F .

16.2.c Moments

Théorème 16.7

Pour $X \odot \mathcal{U}_{[a,b]}$, nous avons

$$\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2} \text{ et } \mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve :

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = \int_a^b x^k f(x) dx$$

est une intégrale définie donc existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

- b) Calculer la dérivée de cette fonction et en déduire qu'elle est constante.
Déterminer cette constante.

6. Nous considérons l'intégrale de Laplace - Gauss^{#4#5}

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

- a) Montrer $0 \leq \int_1^X e^{-x^2} dx \leq \int_1^X e^{-x} dx$ pour tout $X \geq 1$.

- b) En déduire que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-x^2} dx$ existe.

- c) Déduire de ce qui précède la valeur de I .

Conclure.

D'après Bac 1980, vous avez bien lu ...

Indication :

Nous avons prouvé à l'exercice 9.5 : page 443 que cette intégrale converge et nous avons calculé à l'exercice 13.8 : page 566 la valeur de cette intégrale.

Cet exercice est une méthode développée dans les années 1980, où les probabilités étaient enseignées en terminale (je suis certain que vos parents connaissent). ★

Corrigé :

1. Etude de φ .

- a) φ n'est pas définie pour $\cos t = 0$, soit $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il est immédiat que

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2 + k\pi} -\frac{1}{\cos^2 t} = -\infty \text{ d'où } \lim_{t \rightarrow \pi/2 + k\pi} \varphi(t) = 0,$$

ce qui permet de prolonger φ en $t = \pi/2 + k\pi$ en posant $\varphi(\pi/2 + k\pi) = 0$.

Ainsi φ est continue sur $\mathbb{R}$.

- b) La fonction $\cos$ est 2π -périodique, ce qui implique que la période de φ est au plus 2π .

En remarquant que $\cos^2(\pi + t) = \cos^2 t$, nous établissons que la période de φ est $T = \pi$.

La fonction φ étant impaire, il en résulte que le plus petit intervalle d'étude pour φ est $[0, \pi/2]$.

- c) φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$ comme composée de la fonction dérivable

$u(t) = -\frac{1}{\cos^2 t}$ et de la fonction exponentielle.

$$\varphi'(t) = -2 \frac{\sin t}{\cos^3 t} e^{-1/\cos^2 t}.$$

^{#4}Pierre Simon Laplace (1749-1827), Astronome, Physicien et Mathématicien qui formula en 1796 son hypothèse cosmologique : "Le système solaire provient d'une nébuleuse primitive entourant un noyau fortement condensé et tournant autour d'un axe passant par la terre".

Nous retiendrons ses travaux dans le domaine des probabilités qui ont conduit à la loi dite normale ou de Laplace-Gauss.

A peut être été à l'Ecole Militaire un des professeurs de Bonaparte, qui plus tard fit de lui un Ministre de l'Intérieur.

^{#5}Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Astronome, Mathématicien et Physicien Allemand, auteur de travaux sur la mécanique céleste, les probabilités, le magnétisme, l'électromagnétisme et l'optique.

Théorème 16.14 : dit de transfert

Si f est la densité de probabilité d'une **v.a.c** X et φ une application continue sur $X(\Omega)$ alors

$$\mathbb{E}[Y = \varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx.$$

Preuve :

Ce théorème est très important car il permet de calculer $\mathbb{E}[Y]$ sans connaître la densité de probabilité de Y .

Nous allons établir ce théorème dans le cas où φ est de classe C^1 sur Ω et $\varphi'(x) > 0$ sur Ω .

Par définition si g est la densité de Y alors

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y g(y) dy,$$

soit en utilisant le **théorème 16.13**

$$g(y) = \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \text{ et } dy = \varphi'(x) dx$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx.$$

Nous l'admettons dans le cas général.

Attention : Si $\Delta_X = X(\Omega)$ et $\Delta_Y = \varphi(\Delta_X)$ alors l'intégration est faite sur Δ_Y . ■

Corollaire 16.1

Sur l'espace vectoriel des **v.a.c** définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \text{Pr})$ l'application

$$\mathbb{E} : X \rightarrow \mathbb{E}[X]$$

est une forme linéaire dont la forme quadratique est positive, mais non définie.

Preuve :

La linéarité résulte du **théorème de transfert** et de la linéarité de l'intégrale.

La forme quadratique est la variance, qui est positive mais non définie car

$$\mathbb{V}[X] = 0 \not\Rightarrow X = 0.$$

Cf. **exercice 7.4 : page 303.** ■

Exercice 16.10

Pour $X \odot \mathcal{U}_{[-1,2]}$, déterminer la densité de probabilité de la **v.a.c** $Y = X^2$.

Calculer l'espérance mathématique de Y , puis contrôler le résultat obtenu avec le **théorème de transfert**.

Corrigé :

La **v.a.c** X admet pour densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est immédiat à partir du tracé de φ que si nous notons $G(y) = \text{Pr}(Y < y)$ alors :

16.6.c Informatique

Lors d'un problème de statistique ou de probabilité, il peut être demandé pour une **v.a.c** X de densité paire f continue sur $\mathbb{R}$, de déterminer le réel x tel que pour p donné compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ on ait ^{#8}

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = p, \quad (16.27)$$

Nous supposons connue une méthode numérique de calcul de l'intégrale $F(x)$, cf. § 9.2 : page 454 ou plus simplement les instructions **MatLab**.

f = inline(' densite ');

densite est la fonction $f(t)$

F = quad(f, x)

F donne la valeur de l'intégrale

Nous noterons **integrale(x)** la fonction qui renvoie $F(x)$.

Le problème consiste à déterminer un encadrement de x par une dichotomie à partir de u_0 et v_0 tels que

$$F(u_0) \leq p \leq F(v_0).$$

Il est demandé d'écrire un programme **MatLab** qui pour une fonction f et le réel p donné, renvoie une valeur approchée de x en général à 10^{-3} .

Application : Pour la **v.a.c** du t de Student - Fisher avec $k = 8$, déterminer la valeur de x telle que $p = 0,475$.

Corrigé :

Nous partons d'un encadrement $u < x < v$ et nous utilisons une dichotomie.

Revoir **tome 1 - § 6.3.a : pages**

289 à 292.

Si $F\left(\frac{u+v}{2}\right) < p$ alors

$$u = \frac{u+v}{2} \text{ et } v \text{ est conservé}$$

sinon

$$u \text{ est conservé et } v = \frac{u+v}{2}.$$

Le cas (improbable) où $F\left(\frac{u+v}{2}\right) = p$ est écarté.

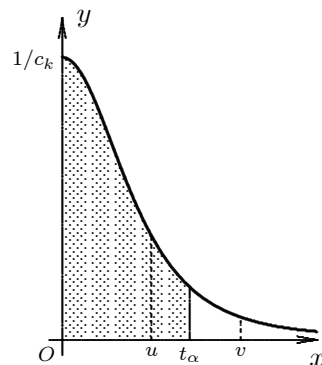


FIG. 16.12 – Encadrement de x par dichotomie

Le seul problème délicat est celui de la précision, mais au vu de la rapidité de **MatLab**, il est possible de choisir une précision assez “généreuse”.

^{#8}Pour les lois classiques de probabilité : loi de Poisson, loi normale, loi du t de Student-Fisher, ... il existe des tables de valeurs numériques qui donnent ce résultat.

où $\mathcal{D}_x$ est la projection sur le plan Oyz de la section de $\mathcal{D}$ et du plan d'abscisse x , cf. § 13.3 : page 568.

De manière analogue, nous définissons les densités de probabilités marginales $h(y)$ et $i(z)$ de Y et Z .

Théorème 17.5

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires X et Y indépendantes alors

$$\mathbb{V}[aX + bY] = a^2 \mathbb{V}[X] + b^2 \mathbb{V}[Y], \quad (17.4)$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $\mathbb{V}[X]$ et $\mathbb{V}[Y]$ existent.

Preuve :

Si les deux v.a.c X et Y sont indépendantes alors en notant $f(x, y) = g(x) h(y)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dy dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} x g(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} y h(y) dy \right) \\ &= \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y], \end{aligned}$$

ce qui donne $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et le résultat avec (17.3).

Il faut, pour être rigoureux si l'intégration est faite sur $\mathbb{R}$, montrer que l'intégrale donnant $\mathbb{E}[XY]$ est absolument convergente.

Pour cela, il suffit d'écrire

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |xy| f(x, y) dy dx = \left(\int_{\mathbb{R}} |x| g(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |y| h(y) dy \right),$$

ce qui permet de conclure. ■

Exercice 17.2

Nous montrons sur un exemple que si $\text{Cov}(X, Y) = 0$ alors les deux v.a.c X et Y ne sont pas obligatoirement indépendantes, ce qui est le cas pour des v.a.d, cf. tome 1 - exercice 5.11 : page 575.

Calculer pour le couple aléatoire (X, Y) distribué de manière uniforme sur le disque unité les valeurs de $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$, puis conclure.

Corrigé :

Toutes les intégrales existent car nous sommes dans le domaine borné : $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

La densité de probabilité est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est immédiat que les intégrales

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int \int_{\mathcal{D}} x f(x, y) dy dx \\ \mathbb{E}[Y] &= \int \int_{\mathcal{D}} y f(x, y) dy dx \\ \mathbb{E}[XY] &= \int \int_{\mathcal{D}} xy f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

sont nulles, pour des raisons de symétries.

Théorème 17.11

a et b deux constantes réelles.

Si $X \odot \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $Y = aX + b \odot \mathcal{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$.

Les résultats de ces théorèmes peuvent être retenus à l'aide de la linéarité de l'espérance et de la propriété de la somme des variances de variables aléatoires indépendantes qui sont valables pour les **v.a.d** et **v.a.c**.

Théorème 17.12

Si $X_i \odot \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $i = 1..n$ telles que $(X_i)_{i=1..n}$ soient indépendantes alors

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \odot \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le **théorème 17.10** pour $\mu_i = \mu$ et $\sigma_i = \sigma$ constants, puis le **théorème 17.11** pour $a = \frac{1}{n}$ et $b = 0$. ■

Exercice 17.10 : partiel Vêto 83

Dans une coopérative laitière, le lait est mis en emballage carton d'un litre par une machine conditionneuse et les poids de ces " boîtes de lait " se répartissent suivant une loi normale de moyenne 1 050 g et d'écart-type 20 g.

1. Quelle est la probabilité pour que le poids d'une boîte soit compris entre 1 030 g et 1 080 g ?
2. Combien peut-on présumer qu'il y aura de boîtes dont le poids soit inférieur à 1 020 gr dans un lot de 1 000 boîtes ?
3. Une autre machine met ces boîtes par paquets de 10, sous film plastique résistant. Les machines étant en état de marche normale, on prélève, au hasard, un certain nombre de paquets pour mesurer le poids moyen d'un carton d'un litre.

Si X est le poids moyen d'un carton dans un échantillon de 10, qu'elle est la loi suivie par X ?

Quelle est la probabilité pour qu'un poids moyen observé s'écarte de la valeur moyenne de plus de 1% de cette valeur ?

Corrigé :

Nous notons P la variable aléatoire normale égale au poids d'un carton de 1 litre de lait. Par hypothèse $P \odot \mathcal{N}(\mu = 1\,050, \sigma = 20)$.

1. On demande de déterminer

$$p_1 = \Pr(1\,030 \leq P \leq 1\,080).$$

Pour cela, nous utilisons la variable aléatoire normale centrée réduite

$$T = \frac{P - 1\,050}{20}.$$

Nous avons l'égalité des événements

$$(1\,030 \leq P \leq 1\,080) = \left(t_1 = \frac{1\,030 - 1\,050}{20} = -1 \leq T \leq t_2 = \frac{1\,080 - 1\,050}{20} = 1,5 \right)$$

18.3.b Théorèmes limites**Théorème 18.9 : de Moivre - Laplace**

Si X_n est le nombre de succès dans une suite d'épreuve de Bernoulli de paramètre p , voisin de $\frac{1}{2}$, alors pour $n \geq 30$ ^{#8}

$$\forall k = 0..n \quad \Pr(X_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right)$$

$$\forall r < s \quad \Pr(r \leq X_n \leq s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{r-1/2}^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(x - np)^2}{2npq}\right) dx,$$

où nous avons posé $q = 1 - p$.

Preuve :

Admis. Dans la pratique on constate que si n est très grand alors il n'est pas nécessaire que p soit voisin de $\frac{1}{2}$.

Dans la pratique, nous utiliserons la loi normale centrée réduite, car les valeurs sont données par des tables numériques ou par certaines calculatrices.

Ainsi

$$(r \leq X_n \leq s) = \left(a = \frac{r - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b = \frac{s - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

et nous aurons

$$\Pr(r \leq X_n \leq s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-1/2}^{b+1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

ce qui donne la valeur de la probabilité avec la table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. ■

Théorème 18.10 : Central Limit

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de **v.a** indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 , alors pour $F = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{F - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = T \circ \mathcal{N}(0, 1).$$

Ce qui équivaut, d'après la **définition de la convergence en loi**

$$\forall a < b \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a < T_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a'}^{b'} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

où $a' = a$ et $b' = b$ si X_n est une **v.a.c** sinon $a' = a - \frac{1}{2}$ et $b' = b + \frac{1}{2}$ si X_n est une **v.a.d**.

Preuve :

Admis. Ce théorème a été démontré par **Lindeberg - Lévy**.

Noter le nom d'usage anglo saxon, vous pouvez et c'est votre droit dire : **théorème de la limite centrale**.

Remarquer que T_n est une **v.a** centrée réduite car $\mathbb{E}[F] = \mu$ et $\mathbb{V}[F] = \frac{\sigma^2}{n}$.

^{#8}En fait l'approximation dépend des valeurs de np et de $np(1-p)$.

Un petit programme en **MatLab** permet de vérifier cela.

Pas d'inquiétude, dans les concours cela sera donné.

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq N) \leq 0,025 &\iff \Pr\left(Y \geq \frac{N-480}{\sqrt{408}}\right) \leq 0,025 \\
&\iff 1 - \Phi\left(\frac{N-480}{\sqrt{408}}\right) \leq 0,025 \\
&\iff \Phi\left(\frac{N-480}{\sqrt{408}}\right) \geq 0,975 \geq \Phi(1,96),
\end{aligned}$$

d'après la table de la **loi normale 16.4.e : page 677**

La condition donc sera réalisée pour

$$\frac{N-480}{\sqrt{408}} \geq 1,96 \iff N \geq 520.$$

Remarquer que ce nombre est voisin de la moyenne.

Le lecteur pourra reprendre cet exercice en proposant l'approximation par une loi de Poisson, puis conclure.

Exercice 18.13

Les compagnies aériennes pratiquent le “surbooking”, ce qui est gênant pour un candidat à l'oral **INA PG** qui doit prendre l'avion.

Expliquons et vous pourrez ainsi trouver une solution ^{#11}.

Certains passagers réservent sur plusieurs vols et choisissent au dernier moment de partir ou non, c'est ingérable ... d'où une sur-réservation.

Pour un A 320 le nombre de réservations enregistrées est $n > 150$ (nombre de passagers maximum). Les 150 premiers inscrits à l'enregistrement peuvent partir, les autres sont en “stand by”

1. Nous supposons que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 0,10. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre aléatoire de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

Donner la loi de S_n , l'espérance $\mathbb{E}[S_n]$ et l'écart type σ_{S_n} .

2. Les hôtesses d'accueil de cette compagnie aimeraient connaître la valeur maximale de n telle que $\Pr(S_n \leq 150) \leq 0,99$.

En utilisant le théorème de la limite centrale proposez une solution de ce problème.

Corrigé :

1. S_n compte le nombre de succès de réalisations de n expériences aléatoires indépendantes, la probabilité de succès de chacune est de $p = 0,90$, un premier piège.

Nous en déduisons que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p = 0,90)$.

Nous en déduisons

$$\mathbb{E}[S_n] = np = 0,90n \text{ et } \sigma_{S_n} = \sqrt{np(1-p)} = 0,3\sqrt{n}.$$

2. En notant $Y_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma_{S_n}} = \frac{S_n - 0,90n}{0,3\sqrt{n}}$, nous avons

$$S_n = 0,3\sqrt{n}Y_n + 0,90n \leq 150 \iff Y_n \leq \frac{150 - 0,90n}{0,3\sqrt{n}},$$

^{#11} Il reste à partir la veille ou le vélo ... pas de panique, il y a 20 vols et 6 trains par jour sur Toulouse - Paris.

Corrigé :

Nous développons une première méthode qui utilisera des fonctions écrites en **MatLab** qui calculent les valeurs numériques des paramètres de la série statistique double (X, Y) et les équations des deux droites de régression linéaires au sens des moindres carrés.

Une deuxième méthode utilisera des fonctions **MatLab** qui donnent directement le résultat.

1. Nous avons le tableau des données en (X, Y)

X	3,985	4,272	4,491	4,775
Y	4,409	3,635	3,307	2,955

2. Avec $n = 4$, nous avons

$$\overline{X} = \frac{SX}{n} \text{ et } \sigma_X^2 = \frac{n SCX - SX^2}{n^2}.$$

Les coefficients de la droite de régression $\Delta_{X|Y} : y = ax + b$ sont

$$a = \frac{n \text{ SP } XY - SX * SY}{n SCX - SX^2} \text{ et } b = \frac{SY * SCX - SX * \text{ SP } XY}{n SCX - SX^2}.$$

Les six fonctions demandées sont les suivantes :

```
function SX = Som(X);           X est la matrice des données
[n, p] = size(X);              nombre de lignes et de colonnes de X
SX = 0;
for i = 1 : p;                  il est aussi possible d'écrire X(1, i)
    SX = SX + X(i);
end;
```

```
function Moy = Moyenne(X);      nombre de lignes et de colonnes de X
[n, p] = size(X);              appel de la fonction Somme
SX = Som(X);
Moy = SX / p;
```

```
function SCX = Som_Carre(X);    X est la matrice des données
[n, p] = size(X);              nombre de lignes et de colonnes de X
SCX = 0;
for i = 1 : p;                  il est possible d'écrire X(1, i)
    SCX = SCX + X(i)^2;
end;
```

```
function SPXY = Som_Pr(X, Y);  X et Y sont les matrices des données
[n, p] = size(X);              nombre de lignes et de colonnes de X,
                                il est inutile de faire size(Y), sauf pour
                                contrôle
SPXY = 0;
for i = 1 : p;                  il est aussi possible d'écrire X(1, i) et
                                Y(1, i)
    SPXY = SPXY
        + X(i) * Y(i);
end;
```

Si σ n'est pas connu alors d'après le **théorème 20.5**, en supposant que l'effectif N de la population $\mathcal{P}$ est infini

$$\sigma_{est}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{n SCD - SD^2}{n(n-1)} = 0,47.$$

Nous constatons que σ_{est} est plus grand que le σ connu, c'est logique.

Théorème 20.6

Si la variance σ^2 d'une population $\mathcal{P}$ est estimée alors la variance σ_M^2 de la distribution d'échantillonnage des moyennes sera estimée sans biais par $\frac{\sigma_{est}^2}{n} = \frac{s^2}{n-1}$ pour les tirages indépendants ou par $\frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma_{est}^2}{n} = \frac{N-n}{N} \frac{s^2}{n-1}$ pour les tirages exhaustifs.
 s^2 est la variance de l'échantillon $\mathcal{E}$ de la population $\mathcal{P}$ considérée.

Preuve :

Elle résulte des **théorèmes 20.1** et **20.5**. ■

Exercice 20.6

Donner une estimation de la variance σ_M^2 de la distribution d'échantillonnage des moyennes pour l'**exercice 20.4**.

Corrigé :

σ_M^2 sera estimé par $\frac{s^2}{n-1}$ soit
 $\sigma_{M\ est}^2 = 40.$

Remarquer que pour l'**exercice 20.5**, σ_M^2 n'est pas à estimer car σ^2 est connu, nous aurions $\sigma_M^2 = 0,046$.

20.3 Estimation par intervalle de confiance

20.3.a Estimation de la moyenne

Nous considérons toujours une population $\mathcal{P}$ munie d'une loi X de moyenne μ et de variance σ^2 .

n désigne la taille des échantillons $\mathcal{E}$ prélevés au hasard dans $\mathcal{P}$.

Nous n'envisageons dans ce paragraphe que les trois cas suivants :

X est une loi quelconque et $n \geq 30$. (Cas 1)

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $n < 30$ et σ est connu. (Cas 2)

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $n < 30$ et σ est inconnu. (Cas 3)

Remarquer que le cas des petits échantillons, $n < 30$, exige pour notre développement une loi normale X sur la population $\mathcal{P}$.

Pour les deux premiers cas, nous utiliserons le **théorème de la limite centrale** et pour le troisième le **théorème de Student - Fisher**.

Théorème 20.7

Pour une population $\mathcal{P}$ vérifiant (Cas 1) ou (Cas 2), la distribution d'échantillonnage des moyennes M suit la normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma_M)$.

Preuve :

Admis. ■