Séries de fonctions

II 1 - Introduction

a. Séries de fonctions.

b. Convergences.

c. Intégration et dérivation.

II 2 - Séries entières

a. Définition. Rayon de convergence.

b. Développement de fonctions usuelles.

c. Application aux équations différentielles.

II 1 a - Séries de fonctions

Série de fonctions : $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad S_n(t)=\sum_{p=0}^{n} u_p(t) \quad t\in I$

(où I est un intervalle)

II 1 b - Convergence d'une série de fonctions

*** Convergence simple** $\quad t$ **fixé alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$

*** Convergence uniforme** $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t) \quad \forall\, t\in I$

Exercice

II 1 1: Etude des suites

a) $$S_n(t) = \frac{1}{n} e^{-t/n} \quad t \geq 0$$

b) $$S_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2}$$

Pour chacune calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} S_n(t)\,dt$$

MAPLE

> assume(n>0):

> Int(exp(-t /n) / n, t=0..infinity) :" = value(") ;

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-t/n}\, dt = 1$$

> Limit(exp(-t/n) / n, n=infinity) : " = value(") ;

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} e^{-t/n} = 0$$

La convergence ici n'est que simple.

La limite de l'intégrale n'est pas l'intégrale de la limite.

MAPLE

```
> restart : S := (n,t) -> (1+t^2 / n^2)^(-n^2) :
> Limit( S(n,t),  n = infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2} = e^{-t^2}$$

```
> F(n) := Int( S(n,t), t = 0..infinity ) :
> with(student) : var := 1+t^2/n^2=1/cos(theta)^2 :
> simplify(changevar(var, F(n), theta ), symbolic ) ;
```

$$n\int_0^{\pi/2} \cos^{2\left(n^2-1\right)}\theta \; d\theta$$

$$\boxed{F(n) := n\frac{\pi}{2}\frac{\left(2n^2-3\right)\left(2n^2-5\right)\cdots 5\,3\,1}{\left(2n^2-4\right)\left(2n^2-6\right)\cdots 6\,4\,2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

II 1 b - Critères de convergence uniforme

Série de fonctions : $\{u_n(t)\}_{n\in\mathrm{N}}$ $\quad S_n(t)=\sum_{p=0}^{n} u_p(t) \quad t\in I$

(*I* est un intervalle)

Théorème :

Il y a convergence uniforme dans les deux cas suivants :

Convergence normale

$$\forall\, t\in I\ \left|u_n(t)\right|\le v_n \ \text{ avec } \{v_n\} \text{ converge}$$

Critère d'Abel

$$\forall t\in I\, u_n(t)=v_n w_n(t) \text{ avec } \begin{cases} (v_n) \text{ positive et} \\ \text{décroissante vers 0,} \\ \text{et } \{w_n(t)\} \text{ majorée} \end{cases}$$

Exercice

II 1 2 : Etudier la série de terme général

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{n} \quad n \geq 1$$

* Déterminer $$a(t) + ib(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions réelles.

* Tracer $b(t)$ sur [0, 4π].
  En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{-t+\pi}{2} \text{ pour } 0 < t < \pi$$

MAPLE

```
> u := (n,t) -> exp( I*n*t ) / n :
> Sum( u(p,t), p = 1..infinity) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{p} = -\ln\left(1 - e^{it}\right)$$

Critère d'Abel

```
> simplify( evalc( " ), trig ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos pt}{p} + i \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin pt}{p} = -\frac{1}{2}\ln\left(2 - 2\cos t\right)$$

$$- i \arctan\left(-\sin t, 1 - \cos t\right)$$

Pour $0 < t < \pi$

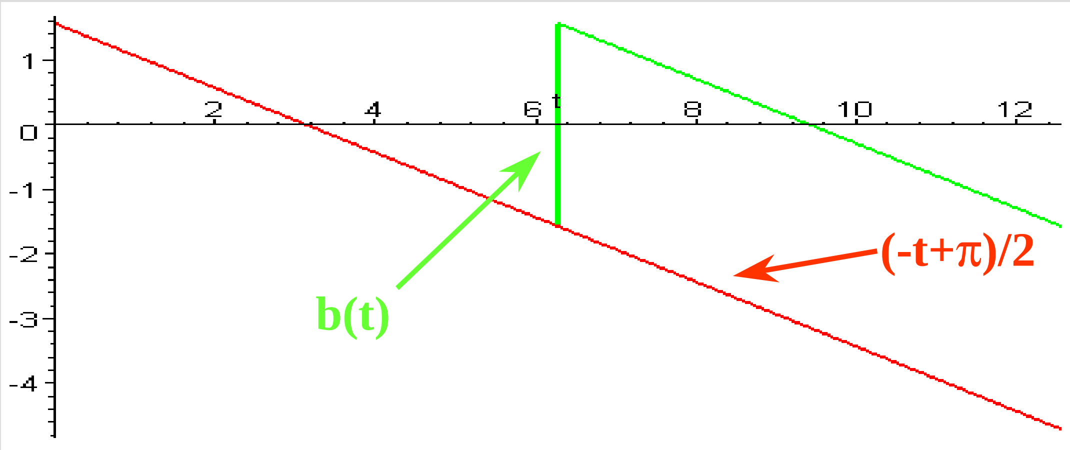
$$\arctan\left(-\sin t, 1 - \cos t\right) = \arctan\left(\frac{-\sin t}{1 - \cos t}\right)$$

MAPLE

> **b := t->arctan(sin(t) / (-1+cos(t))) ;**

$$b := t \rightarrow -\arctan\left(\frac{-\sin t}{1-\cos t}\right)$$

> **plot({ b(t), (-t+Pi) / 2 },t = 0..4*Pi) ;**



II 1 c - Intégration et dérivation

Théorème de dérivation terme à terme :

Si la série $\left\{u'_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I
alors

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u'_p(t) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p(t)\right)'$$

Théorème d'intégration terme à terme :

Si la série $\left\{u_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I
alors

$$\int_a^x \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(t)\,dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_a^x u_p(t)\,dt$$

où $[a, x] \subset I$

II 2 a - Séries entières

Série de fonctions de la forme:
(I est un intervalle)

$$\left\{u_n(t) = a_n\, t^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{où } t \in I$$

Rayon de convergence :

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Pour $|t| < R$, il y a convergence normale donc uniforme.

Pour $|t| = R$, il faut faire une étude plus précise.

Exercice

II 1 2 : Etudier la série de terme général

$$u_n(t) = \frac{t^n}{n(n+1)} \quad n \geq 1$$

*** Déterminer son rayon de convergence.**

*** Calculer sa somme.**

MAPLE

```
> u := (n,t) -> t^n / n / (n+1) ;
```

$$u := (n,t) \to \frac{t^n}{n(n+1)}$$

```
> Limit( u(n+1,t) / u(n,t), n =infinity) : " = value( " ) ;
```

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{t^{n+1} n}{(n+2) t^n} \right) = t$$

```
> Sum( u(p,t), p=1..infinity ) : " = value( " ) :
```

```
> simplify( " ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p(p+1)} = \frac{t - t\ln(1-t) + \ln(1-t)}{t}$$

II 2 b - Développement de fonctions usuelles

On utilise le développement en série de Taylor pour une fonction de classe C^∞ en $x=0$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}t^p$$

ATTENTION :

Il faudra calculer le rayon de convergence

Exemples :

$$f(t)=\ln(1-\sin t)$$

$$g(t)=\arctan(1+t)$$

$$h(t)=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+2\arctan(t)$$

Exercice

MAPLE

```
> f := t -> ln( 1- sin(t) ) ;
```

$$f := t \to \ln(1 - \sin t)$$

```
> series( f(t), t = 0, 8 ) ;
```

$$-t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{24}t^5 - \frac{1}{45}t^6 - \frac{61}{5040}t^7 + O\left(t^8\right)$$

```
> g := t -> arctan( 1+t ) ;
```

$$g := t \to \arctan(1 + t)$$

```
> series( g(t), t = 0, 10 ) ;
```

$$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{40}t^5 + \frac{1}{48}t^6 - \frac{1}{112}t^7 + \frac{1}{288}t^9 + O\left(t^{10}\right)$$

MAPLE

```
> h := t -> ln( (1+t) / (1-t) ) + 2*arctan(t) ;
```

$$h := t \to \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + 2\arctan(t)$$

```
> series( h(t), t=0, 22 ) ;
```

$$4t + \frac{4}{5}t^{5} + \frac{4}{9}t^{9} + \frac{4}{13}t^{13} + \frac{4}{17}t^{17} + \frac{4}{21}t^{21} + O\left(t^{22}\right)$$

```
> u := (n,t) -> 4*t^(4*n+1) / (4*n+1) ;
```

$$u := (n,t) \to 4\,\frac{t^{4n+1}}{4n+1}$$

```
> Sum( u(p,t), p=0..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 4\,\frac{t^{4p+1}}{4p+1} = 4t\ \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{4},1\right],\left[\frac{5}{4}\right],t^{4}\right)$$

MAPLE

```
> du := (n,t) -> 4*t^(4*n) ;
```

$$du := (n,t) \to 4\,t^{4\,n}$$

```
> Sum( du(p,t), p=0..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 4\,t^{4\,p} = \frac{4}{1-t^4}$$

Il faut être parfois inventif

```
> Int( 4 / (1-x^4), x=0..t ) : " = value( " ) ;
```

$$\int_0^t \frac{4}{1-x^4}\,dx = 2\operatorname{arctanh}(t) + 2\arctan(t)$$

```
> convert( 2*arctanh (t), ln ) ;
```

$$\ln(1+t) - \ln(1-t)$$

II 2 c - Equations différentielles

Théorème fondamental :

Les séries entières $\sum_n a_n t^n$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n t^{n-k}$$

ont le même rayon de convergence.

Application aux équations différentielles :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{n-1 \leq k \leq 0} a_k(x) y^{(k)}(t) = b(x)$$

avec $a_k(t)$ pour $k = 0..(n-1)$ et $b(x)$ développables en séries entières.

Exercice

II 2 c : Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène linéaire du second ordre

$$\left(1+t+t^2\right)y''(t)+2\left(1+2t\right)y'(t)+2y(t)=0$$

*** Directement avec MAPLE.**

*** Sous forme de séries entières.**

MAPLE

```
> equ := (1+t+t^2)*diff(y(t), t, t)
                  +2*(1+2*t)*diff(y(t), t)+2*y(t) ;
```

$$equ := \left(1+t+t^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t)\right) + 2\left(1+2t\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} y(t)\right) + 2y(t)$$

```
> dsolve( {equ, y(0)=a, D(y)(0)=b }, y(t) ) ;
```

$$y(t) = \frac{a+(a+b)t}{1+t+t^2}$$

A contrôler

```
> dsolve( {equ, y(0)=a, D(y)(0)=b }, y(t), type=series ) ;
```

$$y(t) = a + b\,t - (a+b)t^2 + a\,t^3 + b\,t^4 - (a+b)t^5 + O\left(t^6\right)$$