Calcul Matriciel

1 - Application linéaires :

a. **Définition.**

b. **Expressions d'une aplication linéaire.**

c. **Matrice d'une application linéaire.**

d. **Image et Noyau. Loi du rang.**

2 - Calcul matriciel :

a. **Lien matrice et application linéaire.**

b. **Produit de deux matrices.**

c. **Inverse d'une matrice. Groupe linéaire.**

d. **Matrices équivalentes.**

1 a - Application linéaire ϕ de E dans F.

$$\phi \;:\; E \longrightarrow F$$

$$\vec{u} \qquad\qquad \vec{v} = \Phi(\vec{u})$$

Déf : Φ est K - linéaire ssi

$$\forall(\lambda,\mu) \in K^2 \text{ et } \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$$

$$\text{alors } \Phi(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}) = \lambda\,\Phi(\vec{u}) + \mu\,\Phi(\vec{v})$$

Φ est un endomorphisme si $E = F$.

Φ est une forme linéaire si $F = K$

Exemple de forme linéaire :

$$f \longrightarrow \int f\,dx\,.$$

1 b - Expressions de ϕ.

$$B_E = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p\right)$$ base de E.

$$B_F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_n\right)$$ base de F.

Φ est totalement déterminée par la donnée son expression

vectorielle :

$$\Phi\left(\vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \vec{f}_i \quad \text{pour } i = 1..\,p$$

matricielle :

$$Mat\left(\Phi, B_E, B_F\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1p} \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

analytique :

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p \end{cases}$$

1 c - Matrice de ϕ.

Image par Φ de la base de *E*

base de *F*

$$
Mat(\Phi, B_E, B_F) = \begin{array}{c|c}
\begin{matrix} \Phi(\vec{e}_1) & \quad\quad & \Phi(\vec{e}_j) & \quad\quad & \Phi(\vec{e}_p) \end{matrix} & \\
\hline
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} & y_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} & y_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} & y_n
\end{array}\right) & \begin{matrix} \vec{f}_1 \\ \\ \vec{f}_i \\ \\ \vec{f}_n \end{matrix}
\end{array}
$$

Cette colonne est très utile mais non nécessaire

1 d - Image et Noyau de ϕ.

Déf :

$$\boldsymbol{Im\ \Phi = Vect\left(\Phi(\vec{e}_1),\cdots,\Phi(\vec{e}_p)\right)}$$

$$\boldsymbol{Ker\,\Phi = \left\{\vec{u} \in E \text{ tel que } \Phi(\vec{u}) = \vec{0}\right\}}$$

Im Φ est un sous e.v. de ***F*** donc de dimension au plus *n*.

Ker Φ est un sous e.v. de ***E*** doncde dimension au plus *p*.

Loi du rang :

Dim *Im* Φ +Dim *Ker* Φ = Dim *E*.

Exercice

Φ l'application linéaire de $E = \mathbf{R}^4$ dans $F = \mathbf{R}^3$, définie par sa matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner les expressions vectorielles et analytiques.

Déterminer $\mathit{Im}\ \Phi$ et $\mathit{Ker}\ \Phi$. Vérifier la loi du rang.

MAPLE

```
> restart : with(linalg) :
> M := matrix( [ [-3,-2,1,3,x],
                 [2,1,-1,-2,y],
                 [1,-1,-2,-1,z]]) ;
```

$$M := \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & -1 & -2 & y \\ 1 & -1 & -2 & -1 & z \end{pmatrix}$$

MAPLE

\> swaprow(“, 1, 3) : pivot(“, 1, 1) :

\> mulrow(“, 2, 1/ 3) : pivot(“, 2, 2) ;

Matrice de ***Ker*** Φ

$$M := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \dfrac{y+z}{3} \\ \dfrac{y-2z}{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\dfrac{3x+5y-z}{3}} \end{pmatrix}$$

Equation de ***Im*** Φ

Conclusion de l'exercice

Exercice

1° Les équations de ***Ker*** Φ sont

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} & & - & \boldsymbol{c} & - & \boldsymbol{d} & = & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{b} & + & \boldsymbol{c} & & & = & \boldsymbol{0} \\ & & & \boldsymbol{c} & & & = & \alpha \\ & & & & & \boldsymbol{d} & = & \beta \end{cases}$$

Deux paramètres, donc Dim ***Ker*** Φ = Dim ***E*** **-** 2 = 2.

2° Une équation de ***Im*** Φ est

$$\boldsymbol{3x + 5y - z = 0}$$

Une relation, donc Dim ***Im*** Φ = Dim ***F*** **-** 1 = 2.

Dim ***Ker*** Φ + Dim ***Im*** Φ = Dim ***E*.**

2 a - Lien matrice et application linaire.

$$\phi : E \longrightarrow F \qquad \vec{u} \qquad \vec{v} = \Phi(\vec{u}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}(\phi, \mathbf{B}_E, \mathbf{B}_F) = \left(\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}\right)$$

$\mathcal{L}(E, F)$ **est isomorphe à** $\mathcal{M}(n,p)$
ATTENTION : Les bases $\mathbf{B}_E, \mathbf{B}_F$ ***sont fixées***

2 b - Produit de deux matrices.

$$E \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\psi} G$$

$B_E = \left(\vec{e}_j\right)$ $\quad$ $B_F = \left(\vec{f}_k\right)$ $\quad$ $B_G = \left(\vec{g}_i\right)$

$j = 1..p$ $\quad$ $k = 1..n$ $\quad$ $i = 1..q$

$$\Phi\left(\vec{e}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \vec{f}_k \ \text{pour}\ j = 1..p$$

A = Mat(ϕ , B_E , B_F)

$$\Psi\left(\vec{f}_k\right) = \sum_{i=1}^{q} b_{ik}\ \vec{g}_i \ \text{pour}\ k = 1..n$$

B = Mat(ϕ , B_F , B_G)

2 b - Produit de deux matrices (suite).

$$\Psi \, o \, \Phi\left(\vec{e}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left(\sum_{i=1}^{q} b_{ik} \, \vec{g}_i \right)$$

après développement et regroupement

$$= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \, b_{ik} \right) \vec{g}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{q} c_{ij} \, \vec{g}_i$$

C = Mat($\psi \circ \phi$, B_E , B_G)

2 b - Produit de deux matrices (calculs).

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, b_{ik}$$

$$\begin{array}{cc} & \Phi(\vec{e}_i) \\ A = & \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ & a_{kj} & \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} B = & \begin{pmatrix} \cdots & & & & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & & & & \cdots \end{pmatrix} \\ & \Psi\left(\vec{f}_k\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C = & \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ & c_{ij} & \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} & \vec{g}_i \\ & \Psi \ o \ \Phi\left(\vec{e}_i\right) & \end{array}$$

2 c - Inverse d'une matrice. Groupe linéaire.

ϕ un endomorphisme donné par son expression analytique

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{cases}$$

ϕ^{-1} sera donné en exprimant $x_1,\cdots,x_n$ en fonction de $y_1,\cdots,y_n$.

$$\begin{cases} x_1 & = & b_{11}y_1 & + & \cdots & + & b_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 & + & \cdots & + & b_{nn}y_n \end{cases}$$

Nous sommes ramenés à un système de Cramer

Exercice

Déterminer l'inverse de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1° Méthode directe avec la syntaxe > **inverse(M) ;**

2° Résolution du système Y = M X (Technique de Gauss).

3° **InvM** étant l'inverse (inconnue) de M, former le système de 9 équations à 9 inconnues définit par :

InvM * M = I (I matrice unité d'ordre 3)

MAPLE

```
> with(linalg) :
> M := matrix([-2, -3, 3],
              [3/2, 5/2, -3/2],
              [3/2, 3/2, -1/2]) ;
> invM := inverse(M) ;
```

$$invM := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

MAPLE

```
> invM := matrix([[a, b, c],
                  [d, e, f],
                  [g, h, i]]) :

> evalm( invM &* M ) ;
```

$$\begin{pmatrix} -2a+\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c & -3a+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2}c & 3a-\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c \\ -2d+\frac{3}{2}e+\frac{3}{2}f & -3d+\frac{5}{2}e+\frac{3}{2}f & 3d-\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}f \\ -2g+\frac{3}{2}h+\frac{3}{2}i & -3g+\frac{5}{2}h+\frac{3}{2}i & 3g-\frac{3}{2}h-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Exercice

Ce qui conduit à trois systèmes de 3 équations à 3 inconnues.

Par exemple pour a, b et c :

$$\mathbf{syst1} := \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ -3 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3 & -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

etc ...

2 d - Matrices équivalentes.

$$\phi \ : \ E \longrightarrow F$$

$$\vec{u} \qquad \vec{v} = \Phi(\vec{u})$$

$$\mathrm{Mat}(\phi, \mathbf{B}_E, \mathbf{B}_F) = \mathbf{P} * \mathrm{Mat}(\phi, \mathbf{B'}_E, \mathbf{B'}_F) * \mathbf{Q}$$

$\mathbf{P} = \mathrm{Mat}(\mathbf{B}_E \dashrightarrow \mathbf{B'}_E)$ est la matrice de passage de la base $\mathbf{B}_E$ à la base $\mathbf{B'}_E$.

$\mathbf{Q} = \mathrm{Mat}(\mathbf{B'}_F \dashrightarrow \mathbf{B}_F)$ est la matrice de passage de la base $\mathbf{B'}_F$ à la base $\mathbf{B}_F$.

$\boxed{\mathrm{Mat}(\phi, \mathbf{B}_E, \mathbf{B}_F) \text{ est équivalente à } \mathrm{Mat}(\phi, \mathbf{B'}_E, \mathbf{B'}_F)}$

Exercice

Φ l'application linéaire de $\boldsymbol{E} = \mathbf{R}^5$ dans $\boldsymbol{F} = \mathbf{R}^4$,
définie dans les bases B_E et B_F par la matrice :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux nouvelles bases B'_E et B'_F dans lesquelles la matrice de Φ est :

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MAPLE

```
>  restart : with(linalg) :
>  I := diag(1, 1, 1, 1, 1) ;
>  J := diag(1, 1, 1, 1) ;
>  O := matrix(5, 4, 0) ;
>  M := matrix( [ [1, 2, 1, 1, 2],
                  [3, 7, 2, 3, 7],
                  [-2, -5, -1, 0,-3],
                  [2, 6, 0, 2, 6] ]) ;
> Depart := blockmatrix(2, 2, M, J, I, O) ;
```

MAPLE

$$Depart := \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 7 & 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & -5 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Vous remarquez que cette matrice est nulle

MAPLE

Les opérations ne seront effectuées que sur la matrice M, en particulier la syntaxe

> pivot

est à exclure.

```
>  addrow(“, 1, 2, -3) ; addrow(“, 1, 3, 2) ;
>  addrow(“, 1, 4, -2) ; addrow(“, 2, 1, -2) ;
>  addrow(“, 2, 3, 1) ; addrow(“, 2, 4, 2) ;
>  swapcol(“, 4, 3) ; mulrow(“, 3, 1/2 ) ;
>  addrow(“, 3, 1, -1) ;
```

MAPLE

Il faut maintenant travailler sur les colonnes de la matrice matrice obtenue.

```
> addcol(“‘, 1, 4, -3) ; addcol(“‘, 1, 5, 1 ) ;
> addcol(“‘, 2, 4, 1) ; addcol(“‘, 2, 5, -1 ) ;
> Arrivée := addcol(“‘, 3, 5, -1 ) ;
```

MAPLE

$$
\boldsymbol{Arrivee} := \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Vous remarquez que cette matrice est encore nulle

Exercice

Conclusion de l'exercice

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contrôle :

$$N = P * M * Q$$

> evalm (P &*M &*Q)

Contrôler que *P* et *Q* sont bien inversibles.