Séries numériques

I 1 - Introduction

a. Définition. Convergence. Divergence.

b. Série géométrique.

I 2 - Séries à termes réels positifs

a.. Théorèmes de comparaison.

b. Critère de Riemann.

c. Critère de d'Alembert et de Cauchy.

I 3 - Séries à termes réels ou complexes

a. Convergence absolue.

b. Séries alternées.

c. Transformation d'Abel.

I 1 a - Définition

Suite $(u_n)\ n \in \mathrm{N} \rightarrow$ **Série** $\{u_n\}\ n \in \mathrm{N}\quad S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$

Convergence d'une suite : $\lim_{n\to\infty} u_n = l$

Convergence d'une série : $\lim_{n\to\infty} S_n = L = \sum_{p=0}^{\infty} u_p$

Si *l* est fini la suite est dite convergente sinon divergente

Si *L* est fini la série est dite convergente sinon divergente
***L* est la somme de la série.**

Exercice

I 1 1 a : Etudier la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \qquad n \geq 1$$

I 1 1 b : Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \qquad n \geq 1$$

Calculer sa somme.

MAPLE

```
> u := n -> 1+(-1)^n / n ;
```

$$u := n \to 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

```
> Limit( u(n), n=infinity) : " = value(" ) ;
```

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$$

```
> u := n -> 1 / n^2 ;
```

$$u := n \to \frac{1}{n^2}$$

```
> Sum( u(p), p=1..n) : " = value(" ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = -\Psi(1, n+1) + \frac{1}{6}\pi^2$$

$$\Psi(1, n+1) = \Psi(1, n) - \frac{1}{n^2} \quad \text{avec} \quad \Psi(1,1) = \frac{\pi^2}{6}$$

I 1 b - Série géométrique

La série de terme général

$$u_n = q^n \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{C}$$

admet pour somme des n+1 premiers termes

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} q^p = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Conclusion :

Si $|q| < 1$ alors la série $\left\{q^n\right\}$ converge vers $\sum_{p=0}^{\infty} q^p = \frac{1}{1-q}$

sinon il y a divergence.

Nous étudions le cas où $|q| = 1$, soit $q = e^{i\theta}$

MAPLE

```
> q := exp(I*theta) : u := n -> q^n  :

> Sum( u(p), p=0..n) : " = normal( value("
) ) ;
```

$$\sum_{p=0}^{n}\left(e^{I\theta}\right)^{p}=\frac{1-\left(e^{I\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{I\theta}}$$

```
> a:=exp(I*theta)-1=exp(I*theta/2)*2*I*sin(theta/2) :

> b:=exp(I*theta)^(n+1)-1=exp(I*theta*(n+1)/2)*2*I
                          *sin(theta*(n+1)/2) :

> simplify( subs( {a, b }, " " " ) ) ;
```

$$\sum_{p=0}^{n}\left(e^{I\theta}\right)^{p}=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}e^{I\,n\theta/2}$$

I 2 a - Théorèmes de comparaison $\{u_n \geq 0\}\ \forall n \in \mathrm{N}$

Th1 :

Si $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \leq$ **Majorant** alors la série converge.

Th2 :

Si $\alpha\ w_n \geq u_n \geq \beta\ v_n \quad \forall n \in N, \ \alpha > 0, \ \beta > 0$

alors

$\{u_n\}$ **converge** $\Rightarrow$ $\{v_n\}$ **converge**

$\{u_n\}$ **diverge** $\Rightarrow$ $\{w_n\}$ **diverge**

I 2 b - Critère de Riemann

$\{u_n \geq 0\} \ \forall n \in \mathrm{N}$

Th 3 : (Comparaison avec une intégrale)

Si $u_n = f(n)$ où f est une fonction positive, décroisante alors

l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ avec $a \geq 0$

et la série sont de même nature.

Critère de Riemann

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad n \geq 1$$

$\alpha > 1$ la série converge, sinon elle diverge.

MAPLE

```
> u := n -> 1 / n :
> Sum( u(p), p=1..n ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \Psi(n+1) + \gamma$$

$$\Psi(n+1) = \Psi(n) + \frac{1}{n} \quad \textbf{avec} \quad \Psi(2) = \gamma - 1$$

$$\gamma = 0.5772156649 \quad \textbf{(Euler - Mascheroni)}$$

```
> u := n -> 1 / n^alpha :
> Sum( u(p), p=1..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha}} = \zeta(\alpha)$$

Exercice

I 2 a 1 : Nature et somme (éventuelle) des séries

1 - $u_n = \dfrac{1}{n^4} \quad n \geq 1$

2 - $u_n = \dfrac{2}{n^2 - 1} \quad n \geq 2$

3 - $u_n = \dfrac{2}{n^3 + 1} \quad n \geq 0$

MAPLE

```
> u := n -> 1 / n^4 :
> Sum( u(p), p=1..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{1}{90}\pi^4$$

```
> u := n -> 2 / (n^2-1) :
> Sum( u(p), p=2..n ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{2}{p^2-1} = -\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)n} + \frac{3}{2}$$

```
> u := n -> 2 / (n^3+1) :
> Int( u(x), x=0..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3+1}\,dx = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$$

La valeur approchée de cette série est : 1.686503343

I 2 c - Critère de d'Alembert
Critère de Cauchy

$\{u_n \geq 0\} \ \forall n \in \mathrm{N}$

Th 4 : (Comparaison avec la série géométrique)

Si $u_n \approx \alpha \, q^n$ pour n suffisamment grand et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = q .$$

alors

- q < 1 la série converge
- q > 1 la série diverge
- q = 1 la nature est indéterminée

Critère de d'Alembert	Critère de Cauchy

Exercice

I 2 c 1 : Nature et somme (éventuelle) des séries

1 - $u_n = \dfrac{a^n}{n!} \quad n \geq 0$

2 - $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} \quad n \geq 2$

3 - $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \quad n \geq 0$

MAPLE

```
> u := n -> a^n / n ! :
> simplify( u(n+1) / u(n) ) ;
```

$$\frac{a}{n+1}$$

```
> Sum( u(p), p=0..infinity ) : " = value( " ) ;
```

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a^p}{p!} = e^a$$

Critère de D'Alembert

```
> u := n -> (1-1 / n)^(-n^2) :
> Limit( u(n+1) / u(n), n=infinity) : " = value( ") ;
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = e$$

MAPLE

> u := n -> a^n / n ! :

Il faut simplifier un peu l'expression de u(n) sinon le résultat n'est pas obtenu.

> Limit(a*n!^(-1/n), n=infinity) : " = value(") ;

$$\lim_{n\to\infty} a\left(n!\right)^{-\frac{1}{n}} = 0$$

Critère de Cauchy

> u := n -> (1-1 / n)^(-n^2) :

> Limit(u(n)^(1/n), n=infinity) : " = value(") ;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

MAPLE

```
> u := n -> int( sin(x)^(2*n), x=0..Pi/2) :
> with(student) :
> intparts( int( cos(x)^2*sin(x)^(2*n-2),
                                    x=0..Pi/2 ), cos(x) ) ;
```

Récurrence sur u(n)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} x}{2n-1}\,dx$$

Intégrale de Wallis

```
> rsolve({ v(n)=2*n*v(n-1) / (2*n-1),
                    v(0)=Pi/2 }, v(n) ) ;
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\pi^{3/2}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

MAPLE

> convert(", factorial) :

> u := n -> 1 / 2*n! / (n-1/2)!*Pi^(3/2) ;

$$u := n \to \frac{1}{2}\frac{n!\,\pi^{3/2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}$$

> Limit(u(n+1) / u(n), n=infinity) : " = value(") ;

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{n+1}{2n+1} = 1$$

On ne peut conclure, il faut utiliser Raabe - Duhamel

Si $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = L$$

alors converge pour $L > 1$, sinon diverge.

3 a - Convergence absolue

La série $\{u_n\}$ **est AC ssi** $\{|u_n|\}$ **converge.**

Une série convergente mais non absolument est SC.

3 b - Séries alternées

La série $\left\{u_n = \varepsilon(-1)^n |u_n|\right\}$ **où** $\varepsilon = \pm 1$ **est dite alternée**

Critère :

Une série alternée converge si $|u_n|$ **décroit vers 0.**

I 3 b 1 : Etudier la série harmonique alternée, de terme général

Exercice

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{avec } n \geq 1$$

```
> u := n -> (-1)^(n-1) / n :
> Sum( u(p), p=1..infinity ) : " = value( " ) ;
```

MAPLE

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln 2$$

I 3 c - Critère d'Abel

Critère :

La série $\{u_n = \alpha_n t_n\}$ **est convergente si**

$\{\alpha_n\}$ **est majorée et** $(t_n \geq 0)$ **décroit vers** 0.

Exemple fondamental :

$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}} \quad \text{avec } \alpha > 0.$$