

Séries de Fourier

III 1 - Séries trigonométriques

- a. Premier exercice d'approche.
- b. Deuxième exercice d'approche
- c. Convergences.

III 2 - Séries de Fourier

- a. Définition.
- b. Exemples.
- c. Convergence dans L^1 .
- d. Convergence dans L^2 .
- e. Opérations sur les séries de Fourier.

III - 1a Nous considérons la série de fonctions trigonométriques définie par

Exercice

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_p &= \frac{2 \sin (2p-1) \pi t}{\pi (2p-1)} \quad p \geq 1 \end{aligned}$$

1° Etablir la convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2° Tracer (pour quelques valeurs de n) la fonction

$$f_n(t) = \sum_{p=0}^n u_p$$

3° Formuler une hypothèse sur la somme de la série

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$$



> **u := (p,t) -> 2 / Pi*sin((2*p-1)*Pi*t) / (2*p-1) :**
> **asympt(u(p,t), p, 2);**

$$\frac{\sin (2p-1) \pi t}{\pi p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Conclusion $u(p,t) = \alpha(p,t) v(p)$:

*** la série $\{\alpha_p(t) = \sin(2p+1)\pi t\}$ est majorée par $\frac{1}{|\sin \pi t|}$**

*** la suite $\left(v_p = \frac{1}{\pi p}\right)$ est positive et décroissante vers 0**

**Donc il y a convergence uniforme (Critère d'Abel),
sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.**

> **f :=(n,t) -> 1/2+sum(u(p,t), p=1..n) :**

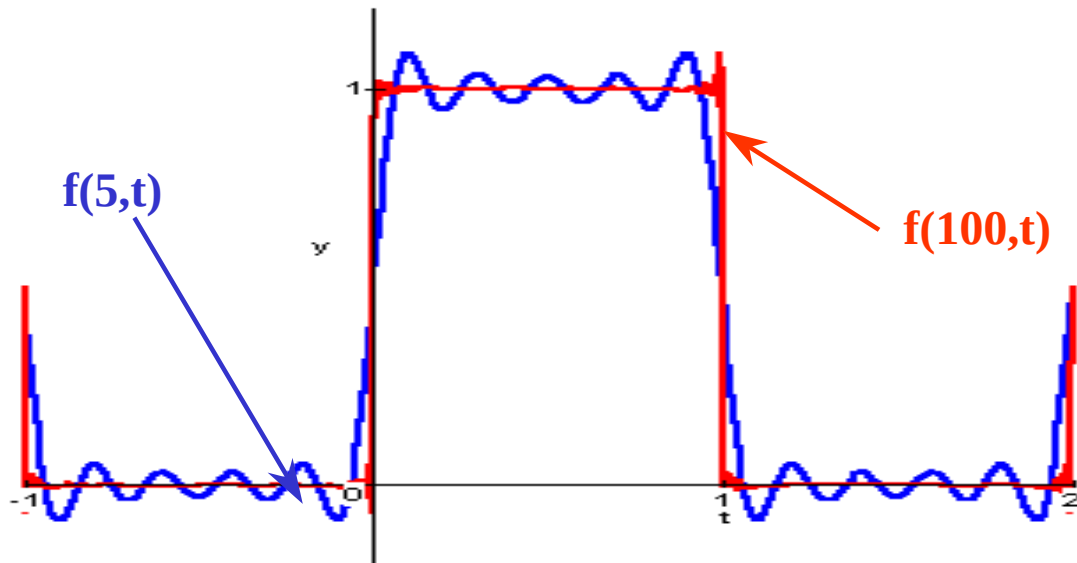
> **with(plots) :**

> **a := plot(f(5,t), t=-1..2, y=-0.2..1.2, color=blue):**

> **b := plot(f(100,t),t=-1..2,y=-0.2..1.2,color=red) :**

> **display(a, b) ;**

MAPLE



Nous pouvons présumer que la fonction $f(t)$ est une fonction 2-périodique, définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Nous remarquons que $f(t)$ est bien discontinue, ce qui résulte de la CU sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

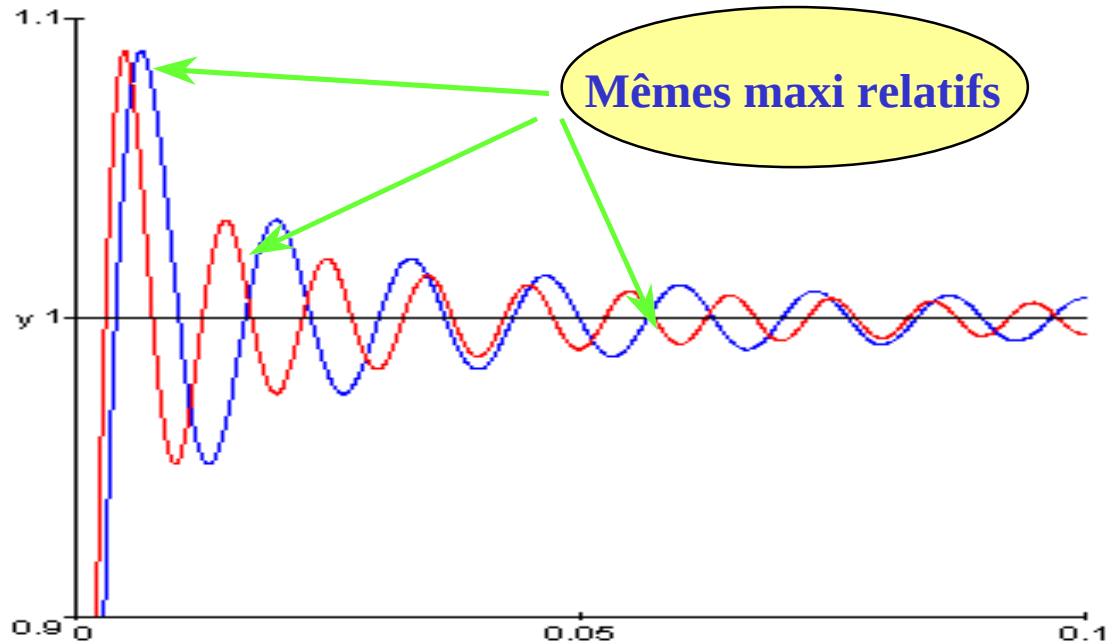
La valeur de $f(t)$ pour t entier relatif n'est pas précisée.

Nous contrôlerons ce résultat au III 2 b Exemple 1.

```

> d := plot( f(75, t), t=0..0.1, y=0.9..1.1,
             color=blue, numpoints=1500) :
> e := plot( f(100, t), t=0..0.1, y=0.9..1.1,
             color=red, numpoints=1500) :
> display( d, e) ;

```



III - 1b Nous considérons la série de fonctions trigonométriques définie par



$$u_0 = \frac{1}{2}$$
$$u_p = \frac{4 \cos (2p-1) \pi t}{\pi^2 (2p-1)^2} \quad p \geq 1$$

1° Etablir la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$.

2° Tracer (pour quelques valeurs de n) la fonction

$$f_n(t) = \sum_{p=0}^n u_p$$

3° Formuler une hypothèse sur la somme de la série



```
> u := (p,t) -> 4/Pi^2*cos((2*p-1)*Pi*t)/(2*p-1)^2 :  
> asympt(u(p,t), p, 3);
```

$$\frac{\cos(2p-1)\pi t}{\pi^2 p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

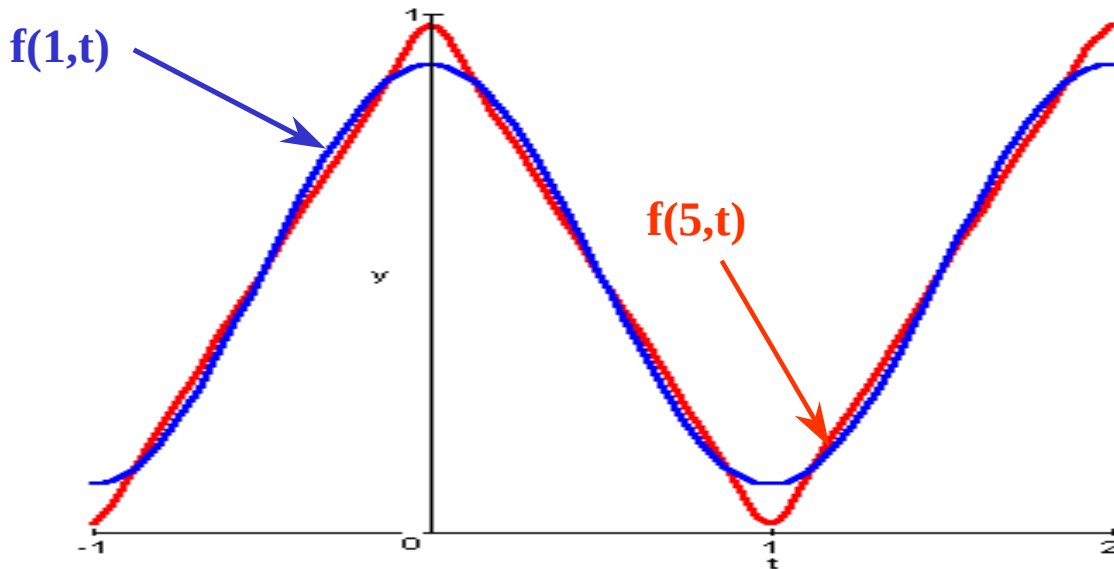
Conclusion :

$$|u_p| \leq \frac{1}{\pi^2 p^2}$$

Il y a convergence normale (Critère de Riemann), ce qui entraîne la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$.

```
> f :=(n,t) -> 1/2+sum(u(p,t), p=1..n) :
```

```
> with(plots) :
> a := plot(f(1,t), t=-1..2, y=0..1, color=blue):
> b := plot(f(5,t),t=-1..2,y=0..1,color=red) :
> display(a, b) ;
```





Nous pouvons présumer que la fonction $f(t)$ est une fonction 2-périodique, paire, définie par

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nous remarquons que $f(t)$ est bien continue, ce qui résulte de la CU.

Nous contrôlerons ce résultat au III 2 b Exemple 2.

III 1 c - Critères de convergence

Série trigonométriques $\left\{ u_n = v_n e^{-in\omega t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Théorème :

Il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}$ avec $T = 2\pi / \omega$ si $(v_{|n|})$ est positive et décroissante vers 0 pour $|n| \rightarrow +\infty$.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \quad \text{est continue sur } \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}.$$

Il y a convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$ si $\{v_n\}$ est absolument convergente.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}.$$

III 2 a - Série de Fourier

f une fonction T-périodique, sa série de Fourier S_f est

$$(1) \quad S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Δ est un intervalle d'amplitude T et $\omega = 2\pi / T$.

Il est possible d'exprimer (1) sous la forme

$$(2) \quad S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$a_0 = c_0, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{pour } 1 \leq n$$

$$\text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(t) \sin n\omega t dt \quad \text{pour } 1 \leq n.$$

Seule condition : existence des intégrales soit $f \in L_1(\Delta)$.

III 2 b - Exemple 1 :

Exercice

Soit la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = -1, 0, 1 \end{cases}$$

1° Déterminer la série S_f de Fourier de f .

2° Examiner la convergence de la série trigonométrique obtenue.

La série S_f de Fourier est :
$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi t}$$

avec $c_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-in\pi t} dt$ car f est nulle sur $[-1, 0]$.



- > **T := 2 : omega := 2*Pi / T :**
- > **assume(n, integer) :**
- > **Int(1 / 2*exp(-I*n*omega*t), t=0..1) : value(") :**
- > **c[n] := simplify((evalc(")) ;**

valable pour $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2} I \frac{-1 + (-1)^{n\sim}}{\pi n \sim}$$

Conclusion :

$$c_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2p-1} = -\frac{i}{\pi(2p-1)}.$$

- > **Int(1 / 2, t=0..1) : c[0] = value(") ;**

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

La série de Fourier de f est donc

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{\pi(2p-1)} e^{i(2p-1)\pi t}$$

Exercice

Nous pouvons regrouper 0 et 1, puis -1 et 2, ... , -p+1 et p

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{\pi(-2p+1)} e^{i(-2p+1)\pi t} - \frac{i}{\pi(2p-1)} e^{i(2p-1)\pi t} \\ &= \frac{2\sin(2p-1)\pi t}{\pi(2p-1)} \\ S_f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\sin(2p-1)\pi t}{\pi(2p-1)} \end{aligned}$$

Il y a convergence uniforme (Critère d'Abel), sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
Nous retrouvons l'exercice III 1 a.

III 2 b - Exemple 2 :



Soit la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1° Déterminer la série S_f de Fourier de f .

2° Examiner la convergence de la série trigonométrique obtenue.

la série S_f de Fourier est : $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\pi t$
car f est paire, avec

$$a_0 = \int_0^1 (1-t) dt \quad \text{et} \quad a_n = 2 \int_0^1 (1-t) \cos n\pi t dt$$



- > **T := 2 : omega := 2*Pi / T :**
- > **assume(n, integer) :**
- > **Int(2*(1-t)*cos(n*Pi*t), t=0..1) :**
- > **a[n] := factor(value(")) ;**

valable pour $n \neq 0$

$$a_n = 2 \frac{1 - (-1)^{n\sim}}{\pi^2 n^2}$$

Conclusion :

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p-1} = \frac{4}{\pi^2 (2p-1)^2}.$$

- > **Int(1-t, t=0..1) : a[0] := value(") ;**

$$a_0 = \frac{1}{2}$$



La série de Fourier de f est donc

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4 \cos(2p-1)\pi t}{\pi^2 (2p-1)^2}$$

**Il y a convergence normale donc uniforme sur $\mathbf{R}$.
Nous retrouvons l'exercice III 1 b.**

III 2 c - Convergence dans $L_1(\Delta)$

f une fonction T -périodique, de série de Fourier

$$(1) \quad S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Δ est un intervalle d'amplitude T et $\omega = 2\pi / T$.

Théorème de Dirichlet :

Si f est de classe C^1 par morceaux alors $\{c_n e^{in\omega t}\}$

converge ponctuellement vers $\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = S_f(t)$.

Il y a convergence uniforme sur tout intervalle fermé où f est continue.

III 2 c - Convergence dans $L_2(\Delta)$

Le produit scalaire dans $L_2(\Delta)$ est défini par

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Delta} u(t) \overline{v(t)} dt$$

Théorème :

$$\left(e_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t}, n \in \mathbb{Z} \right)$$

est une base orthonormée de $L_2(\Delta)$.

(Le contrôler avec MAPLE)

$L_2(\Delta)$ est appelé espace de Hilbert.

Remarque et propriété : $L_2(\Delta) \subset L_1(\Delta)$

La fonction

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad 0 < t \leq 1$$

appartient à $L_1([0,1])$ mais pas à $L_2([0,1])$.

> **Int(1/sqrt(t), t=0..1) : " = value(") ;**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$$

> **Int(1/t, t=0..1) : " = value(") ;**

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt = \infty$$



Théorème de Parseval :

La suite de fonctions $f_n(t) = \sum_{p=-n}^n c_p e^{ip\pi t}$, $n \in \mathbb{N}$
converge dans $L_2(\Delta)$ vers $f(t)$.

Cela exprime que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, f_n \rangle = \|f\|^2$ ce qui est
la formule de Parseval.

$$\|f\|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Soit la fonction 2π -périodique

$$f(t) = e^t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

1° Dire pourquoi f admet un développement en série de Fourier.

2° Etudier la convergence dans $L_1([0, 2\pi])$ et $L_2([0, 2\pi])$.

3° Déterminer $S_f(t)$.

4° Calculer la somme des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}.$$

III 2 e - Opérations sur les séries de Fourier

1) Dérivation terme à terme.

f satisfaisant Dirichlet, alors f' s'obtient en dérivant terme à terme (ATTENTION : Dans le cas général la convergence n'a lieu que dans $L_2(\Delta)$.

(Il faudra examiner la série dérivée pour étudier la convergence dans $L_1(\Delta)$)

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \right)' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n \omega c_n e^{in\omega t}$$

Le terme $n=0$ disparaît dans la série dérivée.

2) Intégration terme à terme.

f satisfaisant Dirichlet, alors $\int f(t)dt$ s'obtient en intégrant terme à terme .

(ATTENTION : La présence de c_0 implique l'ajout de la série de Fourier de la fonction correspondante)

$$\int \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{in\omega} c_n e^{in\omega t}$$

Le terme $n=0$ est à examiner tout particulièrement.