Transformation de Fourier

IV 1 - Convolution

a. Système de convolution.

b. Principe de la convolution.

c. Définition.

d. Exemples.

IV 2 - Transformation de Fourier

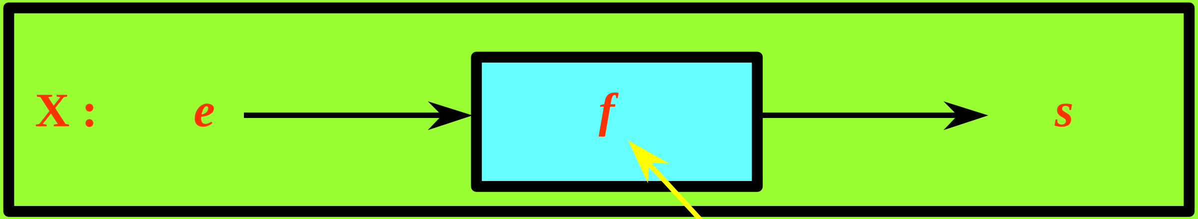
a. Définition. Théorème d'inversion.

b. Exemples.

c. Convolution.

d. TF dans $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^2$.

IV 1 a - Système de convolution .



Définition : Un système de convolution X est

- *** linéaire.**
- *** continue.**
- *** invariant par translation.**

Inconnue

Théorème : Tout système de convolution vérifie $\boxed{s = e * f}$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-u)\, f(u)\, du$$

Dirac

Sous réserve d'existence $e * f = f * e$.

f est dite réponse impulsionnelle car $f * \delta = f$.

IV 1 b - Principe de la convolution.

La transformation de Fourier de de Laplace opérent les transformations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} e & \rightarrow & E \\ f & \rightarrow & F \\ s & \rightarrow & S \end{array}$$

de telle manière que :

$$s = e * f \quad \rightarrow \quad S = E\,F$$

Principe :

$$\begin{array}{ccc} S = EF & \rightarrow & F = S / E \\ \uparrow & & \downarrow \\ s = e * f & & \boxed{f \quad \text{Réponse impulsionnelle}} \end{array}$$

IV 1 c - Définition.

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,du \qquad t\in \mathbf{R}.$$

Théorème :

$f*g$ **existe et appartient à** $\mathbf{L}^1$

si f **et** g **sont dans** $\mathbf{L}^1$ **ou dans** $\mathbf{L}^2$ **.**

Ce résultat est obtenu à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwarz et du théorème de Fubini.

IV -1 d : Exemples.

Exercice

Calculer les carrés de convolution des signaux

1 . $$f(t) = e^{-t^2}$$

2 . $$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

3. $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

MAPLE

```
> f :=t -> exp(-t^2);
```

$$f := t \rightarrow e^{-t^2}$$

```
> Int( f(t-u) * f(u), u=-infinity..infinity ) :
                                  "=value(");
```

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-u)^2}\, e^{-u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

MAPLE

> f := t -> 1 / (1+t^2) :

> Int(f(t-u)*f(u), u=-infinity..infinity) : value(") ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+(t-u)^2\right)\left(1+u^2\right)}\,du$$

pas de réponse

> Int(f(t-u)*f(u), u=0..infinity) : value(") ;

$$\frac{\pi}{4+t^2} - \frac{\ln\left(1+t^2\right)+t\arctan t}{t\left(4+t^2\right)}$$

> Int(f(t-u)*f(u), u=-infinity..0) + " : value(") ;

$$\frac{2\pi}{4+t^2}$$

MAPLE

> **assume(T > 0) :**
f := t -> piecewise(t<T/2 and t>-T/2, 1 , 0) ;

$$f := t \rightarrow \mathbf{piecewise}\left(t < \frac{T}{2} \text{ and } -\frac{T}{2} < t, 1, 0\right)$$

> **convert(f(t), piecewise, t) ;**

$$\begin{cases} 0 & t \leq -\frac{T}{2} \\ 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t \end{cases}$$

ATTENTION
il faut décoder

MAPLE

> **Int(f(t-u)*f(u), u=-infinity..infinity) ;**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{cases} 1 & u - \frac{T}{2} < 0 \text{ and } -\frac{T}{2} - u < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \left(\begin{cases} 1 & t - u - \frac{T}{2} < 0 \text{ and } -\frac{T}{2} - t + u < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) du$$

Nous exprimons ce produit selon la valeur de t **.**

Les valeurs utiles sont :

$t = -T$ **et** $t = T$ **.**

MAPLE

```
> assume( t> T ) :
  Int(f(u)*f(t-u), u=-infinity..infinity ) : value( " ) ;
```

$$0$$

```
> assume( t<- T ) :
  Int(f(u)*f(t-u), u=-infinity..infinity ) : value( " ) ;
```

$$0$$

```
> assume( t< T, t>0 ) :
  Int(f(u)*f(t-u), u=-infinity..infinity ) : value( " ) ;
```

$$T\sim -t\sim$$

```
> assume( t>- T, u<0 ) :
  Int(f(u)*f(t-u), u=-infinity..infinity ) : value( " ) ;
```

$$T\sim +t\sim$$

MAPLE

> **assume(T>0) :**
g := t -> piecewise(t<-T, 0, t<=0, t+T, t<T, -t+T, 0) ;

$$g := t \rightarrow \mathrm{piecewise}\left(t < -T, 0, t < 0, t + T, t < T, -t + T, 0\right)$$

> **convert(g(t), piecewise, t) ;**

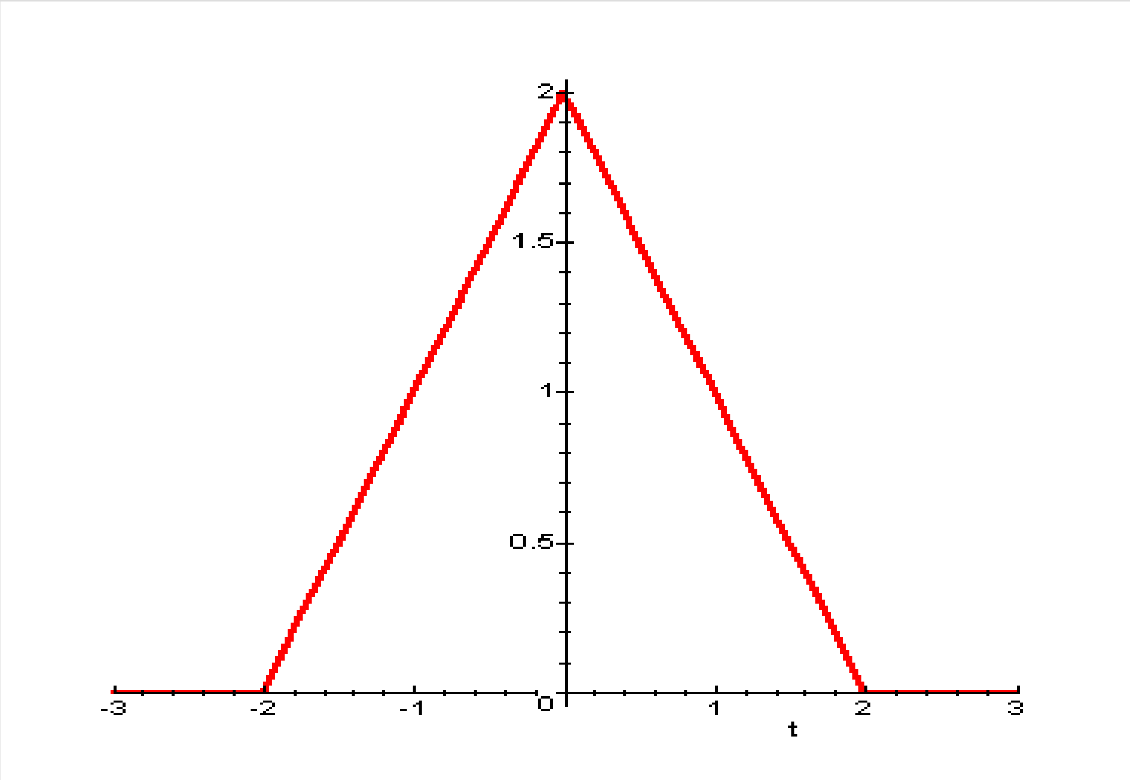
$$\begin{cases} 0 & t \leq -T\sim \\ t + T\sim & t \leq 0 \\ -t + T\sim & t < T\sim \\ 0 & T\sim \leq t \end{cases}$$

ATTENTION

il faut décoder

> **T := 2 : plot(g(t), t=-3..3, thickness=2) ;**

MAPLE



IV 2 a - Définition - Théorème d'inversion.

Définition :

La TF $\mathcal{F}[f]$ **du signal** $f \in \mathbf{L}^1$ **est**

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt \qquad (1)$$

Théorème d'inversion :

La TFI f **du signal** $\mathcal{F}[f] \in \mathbf{L}^1$ **est**

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu \qquad (2)$$

Nous admettons que : $$\lim_{\nu \to \pm\infty} \mathcal{F}[f](\nu) = 0$$

IV -2 b : Exemples.

Exercice

Déterminer les TF des signaux

1 .
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{si} \quad |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2 .
$$g(t) = e^{-\pi t^2}$$

3.
$$h(t) = \frac{\sin t}{t}$$

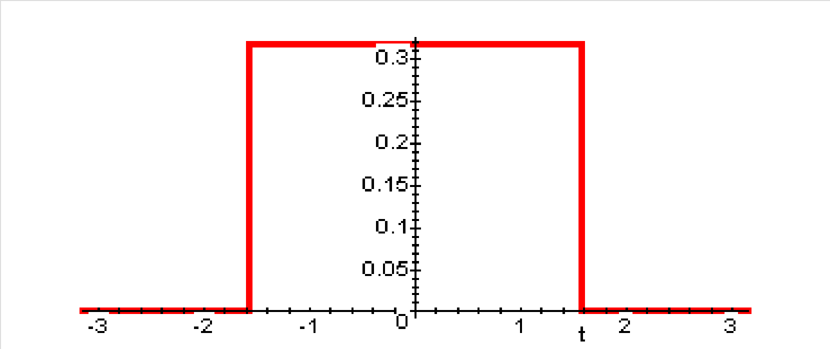
Exemple 1

MAPLE

> assume(T>0) :
f := t -> piecewise(t<-T/2, 0, t<T/2, 1/T, 0) ;

$$f := t \rightarrow \mathbf{piecewise}\left(t < -\frac{1}{2}T, 0, t < \frac{1}{2}T, \frac{1}{T}, 0 \right)$$

> subs(T=Pi, f(t)) : plot(f(t), t=-Pi .. Pi) ;



f est appelée fonction porte ou rectangle et est notée

$$f(t) = \frac{1}{T}\mathbf{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

MAPLE

```
> Int( f(t)*cos(2*Pi*t*nu), t=-T/2..T/2) :
  "=value( " ) ;
```

f est paire
et nulle à l'extérieur

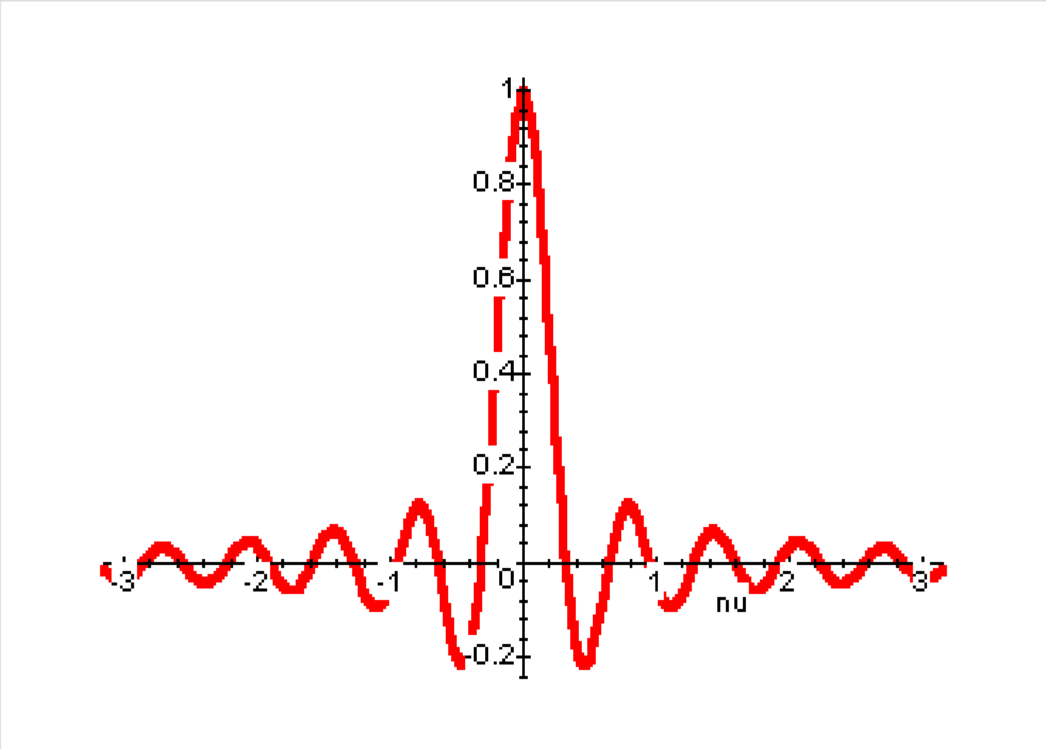
$$\int_{-1/2T\sim}^{1/2T\sim} \left(\begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2}T\sim \\ \frac{1}{T\sim} & t < \frac{1}{2}T\sim \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \cos(2\pi t \nu)\,dt = \frac{\sin(\pi T\sim\nu)}{\pi T\sim\nu}$$

```
> F := nu -> sin (Pi*T*nu) / (T*Pi*nu) ;
```

$$F := \nu \rightarrow \frac{\sin(\pi T \nu)}{\pi T \nu} = \text{sinc}(T\nu)$$

> subs(T=Pi, F(nu)) : plot(F(nu), nu=-Pi .. Pi) ;

MAPLE



MAPLE

> **Int(F(nu)*cos(2*Pi*t*nu), nu = -infinity .. infinity) : " = value(") ;**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi T\sim\nu)\cos(2\pi t\nu)}{\pi T\sim\nu}\,d\nu = -\frac{1}{2}\frac{1-\operatorname{signum}(T\sim+2t)+\operatorname{signum}(-T\sim+2t)}{T\sim}$$

> **convert(-1/2*(-signum(T+2*t)+signum(-T+2*t)) / T, piecewise, t) :**

Comparer la réponse au signal de départ.

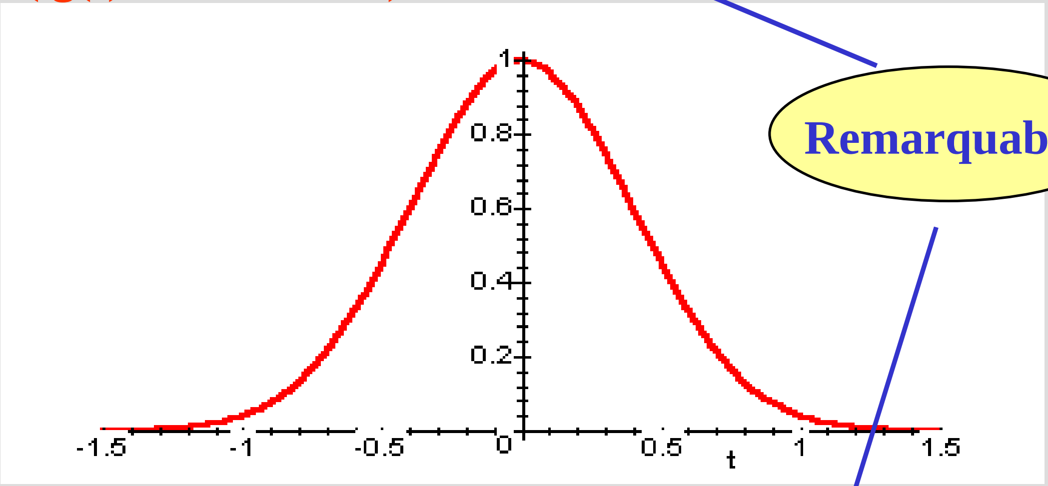
Exemple 2

MAPLE

> g := t -> exp(-Pi*t^2) ;

$$g := t \rightarrow e^{-\pi t^2}$$

> plot(g(t), t=-1.5 .. 1.5) ;



Remarquable

> Int(g(t)*cos(2*Pi*t*nu), t=-infinity..infinity) : " = value(") ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi t \nu)\, dt = e^{-\pi \nu^2}$$

IV 2 c - Convolution.

Théorème de Convolution :

Si f **et** g **sont dans** $\mathbf{L}^1$ **alors**

$$f * g \in \mathbf{L}^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \qquad (3)$$

Si de plus $f\ g,\ \mathcal{F}[f]$ **et** $\mathcal{F}[g] \in \mathbf{L}^1$ **alors**

$$\mathcal{F}[f\ g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \qquad (4)$$

La relation (3) permet de résoudre les équations de convolution cf IV 1 b .

MAPLE

```
> assume( T > 0) :
  f := t -> piecewise( t<T/2 and t>-T/2, 1 , 0 ) :
```

$$f := t \to \mathrm{piecewise}\left(t < \frac{T}{2} \text{ and } -\frac{T}{2} < t, 1, 0 \right)$$

```
> Int( f(t)*cos(2*Pi*t*nu), t=-T/2..T/2) :  "=value( " ) ;
```

$$\int_{-\frac{T\sim}{2}}^{\frac{T\sim}{2}} \left(\begin{cases} 1 & t - \frac{T\sim}{2} < 0 \text{ and } -\frac{T\sim}{2} - t < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \cos(2\pi t \nu)\, dt$$

$$= \frac{\sin(\pi T\sim \nu)}{\pi \nu}$$

MAPLE

```
> assume( T>0 ) :
  g := t -> piecewise(t<-T, 0, t<=0, t+T,
                          t<T, -t+T, 0 ) ;
```

$$g := t \to \mathbf{piecewise}\left(t < -T, 0, t < 0, t+T, t < T, -t+T, 0\right)$$

```
> Int( g(t)*cos(2*Pi*t*nu), t=-T..T) :  "=value( " ) ;
```

$$\int_{-T\sim}^{T\sim} \left(\begin{cases} 0 & t \le -T\sim \\ t + T\sim & t \le 0 \\ -t + T\sim & t < T\sim \\ 0 & T\sim \le t \end{cases} \right) \cos(2\pi t \nu)\, dt$$

$$= -\frac{\cos(\pi T\sim\nu)^2 - 1}{\pi^2 \nu^2}$$

IV 2 d - Transformée de Fourier dans $L^1 \cap L^2$.

Théorème de Parseval :

Si f et g sont dans $L^1 \cap L^2$ alors

$$\left\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \right\rangle = \left\langle f, g \right\rangle$$

En particulier l'énergie est

$$W_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{F}[f](\nu) \right|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

$\mathcal{F}[f]$ est le spectre du signal f.

$\left| \mathcal{F}[f](\nu) \right|^2$ est la densité spectrale d'énergie du signal f.

IV -2 d : Vérifier pour les exemples du IV - 2 b le théorème de Parseval

Exercice

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & \text{si} \quad |t|\le\dfrac{T}{2}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases} \qquad \mathcal{F}[f](\nu)=\frac{\sin(\pi T\nu)}{\pi T\nu}$$

$$g(t)=e^{-\pi t^2} \qquad \mathcal{F}[g](\nu)=e^{-\pi\nu^2}$$

$$h(t)=\frac{\sin t}{t} \qquad \mathcal{F}[h](\nu)=\begin{cases}0 & |\nu|>\dfrac{1}{2\pi}\\ \pi & |\nu|<\dfrac{1}{2\pi}\\ \dfrac{\pi}{2} & |\nu|=\dfrac{1}{2\pi}\end{cases}$$

MAPLE

> **Int(f(t)^2, t = -infinity .. infinity) :**
" = value(") ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2} T \sim \\ \frac{1}{T \sim} & t < \frac{1}{2} T \sim \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right)^2 dt = \frac{1}{T \sim}$$

> **Int(F(nu), nu = -infinity .. infinity) : " = value(") ;**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi T \nu)}{\pi^2 T \sim^2 \nu^2} = \frac{1}{T \sim}$$

MAPLE

> **Int(g(t)^2, t = -infinity .. infinity) : '' = value('') ;**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\pi t^2}\right)^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

> **Int(h(t)^2, t = -infinity .. infinity) : '' = value('') ;**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$$

> **Int(H(nu), nu = -infinity .. infinity) : '' = value('') ;**

$$\int_{-1/2\pi}^{+1/2\pi} \left(\begin{cases} 0 & \nu < -\dfrac{1}{2\pi} \\ \pi & \nu < \dfrac{1}{2\pi} \\ \mathbf{0} & \textbf{otherwise} \end{cases}\right)^2 dt = \pi$$