CORRIGE

Les quatre assertions de la question 01 sont fantaisistes.

Un endomorphisme est une application linéaire particulière donc l'assertion 01A est fausse.
La matrice M de φ est la matrice carrée d'ordre 4

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -5 & -8 \\ -3 & 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

donc l'assertion 01 B est fausse.
Un condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme φ soit bijectif est par exemple que $\ker \varphi = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$; ce qui est indépendant de la dimension de E, donc l'assertion 01 C est fausse.
La présence ou l'absence de b dans B n'a aucune incidence sur le $\ker \varphi$ donc l'assertion 01 D est fausse.

Nous devons répondre Vraie à l'assertion 01 E. C'est pas facile de démarrer ainsi.

Nous avons les réponses :

Question 01 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Vraie

L'ordre de certaines opérations élémentaires n'a pas d'incidence sur le résultat. Il faut examiner chaque cas pas à pas.

Il est clair que les opérations élémentaires

$$L_1 \longleftrightarrow L_2;\ \text{puis } L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1 \text{ et } L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1;\ \text{puis } L_1 \longleftrightarrow L_2$$

ne donneront pas le même résultat. L'assertion 02 A est donc fausse.

Toutefois, il est possible de modifier, par exemple, l'ordre des opérations élémentaires

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1;\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1;\ L_4 \longleftarrow L_4 + 3L_1$$

sans modifier le résultat. L'assertion 02 B est donc vraie.

Avec MAPLE, nous avons la matrice M:

```
> with(linalg) :
> M := matrix( [ [-4, 5, 8, 15], [1, 0, -1, -3], [2, -4, -5, -8], [-3, 4, 6, 11] ] ) :
```

Pour u vecteur de E et phi_u son image par φ:

```
> u := vector( [a, b, c, d ] ) ;
```

$$u := [a, b, c, d]$$

```
> phi_u := vector( [A, B, C, D ] ) ;
```

$$phi\_u := [A, B, C, D]$$

Ce qui donne la matrice associée à l'expression analytique (1):

```
> Depart := augment( M, phi_u ] ) ;
```

$$Depart = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 8 & 15 & A \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -3 & B \\ 2 & -4 & -5 & -8 & C \\ -3 & 4 & 6 & 11 & D \end{pmatrix}$$

Nous effectuons les opérations élémentaires proposées.

$$L_1 \longleftrightarrow L_2$$

Ce qui fera apparaître un pivot en position (1,1).

```
> swaprow ( ", 1, 2 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & -3 & B \\ -4 & 5 & 8 & 15 & A \\ 2 & -4 & -5 & -8 & C \\ -3 & 4 & 6 & 11 & D \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1; \; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1; \; L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$$

permettent de forcer à 0 les éléments autres que le pivot $\boxed{1}$ de la première colonne.

```
> pivot ( ", 1, 1 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & B \\ 0 & 5 & 4 & 3 & A + 4B \\ 0 & -4 & -3 & -2 & -2B + C \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 3B + D \end{pmatrix}$$

Enfin, l'opération élémentaire

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3.$$

permet de faire apparaître un pivot $\boxed{1}$ en position (2,2).

```
> addrow( ", 3, 2,1 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & B \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & A + 2B + C \\ 0 & -4 & -3 & -2 & -2B + C \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 3B + D \end{pmatrix}$$

Ce résultat permet d'écrire une autre forme équivalente à (1) de l'expression analytique de départ

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} B & = & a & & - \; c & - & 3d \\ A + 2B + C & = & b & + & c & + & d \\ -2B + C & = & -4b & - & 3c & - & 2d \\ 3B + D & = & 4b & + & 3c & + & 2d \end{array} \right. . \qquad (2)$$

Ce qui prouve que l'assertion 02 C est vraie et que l'assertion 02 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 02 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Les opérations élémentaires

$$L_4 \leftarrow L_3 + L_4; \; L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

permettent de forcer à 0 les éléments autres que le pivot $\boxed{1}$ situé en position (2,2) dans la matrice associée au système (2) :

```
> addrow ( ", 4, 3, 1) : addrow( ", 3, 2 4) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & B \\ 0 & 1 & 1 & 1 & A + 2B + C \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 4A + 6B + 5C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B + C + D \end{pmatrix}$$

Ces opérations sont valides donc le système obtenu est équivalent à celui du départ, l'assertion 03 A est donc fausse. Toutefois, l'ordre a une incidence sur le résultat. L'assertion 03 B est donc vraie.

Ce résultat permet d'écrire une autre forme équivalente à (2) de l'expression analytique

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} B & = & a & - & c & - & 3d \\ A + 2B + C & = & b & + & c & + & d \\ 4A + 6B + 5C & = & & & c & + & 2d \\ B + C + D & = & 0 & & & & \end{array} \right. \qquad (3)$$

Nous en déduisons que les assertions 03 C et 03 D sont fausses.

Nous avons les réponses :

Question 03 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Les opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3;\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

sont commutatives et permettent de forcer à zéro les éléments autres que le pivot $\boxed{1}$ en position $(3;3)$ ce qui donne la réduite maximale que nous pouvons obtenir avec des opérations élémentaires sur les lignes.

```
> Reduite := pivot( ", 3, 3) ;
```

$$Reduite := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4A+7B+5C \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3A-4B-4C \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4A+6B+5C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B+C+D \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

La forme la plus explicite de l'expression analytique de φ donnée par (1) est:

$$\begin{cases} a \quad\quad - d = 4A + 7B + 5C \\ \quad b \quad - d = -3A - 4B - 4C \\ \quad\quad c + 2d = 4A + 6B + 5C \\ \quad\quad\quad 0 = B + C + D \end{cases} \tag{4}$$

Nous en déduisons que l'assertion 04 D est vraie et que les autres sont fausses.

Nous avons les réponses :

Question 04 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse

Les opérations élémentaires sur les lignes proposées transforment le système (1) en un système équivalent (4) : Le vocable semblable n'a aucun sens, donc l'assertion 05 A est fausse.

φ étant un endomorphisme est simultanément injectif, surjectif et bijectif. Ce qui est faux car le système (4) est de rang 3. En effet la transformée de la matrice M est (0.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ainsi les trois assertions 05 B, 05 C et 05 D sont fausses. Nous devons répondre vraie à l'assertion 05 E.

Nous avons les réponses :

Question 05 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Vraie

Nous déduisons de (4) qu'il ne peut admettre de solutions que si la dernière équation est satisfaite, c'est donc une équation de $\operatorname{Im}\varphi$ (Equation écrite de manière usuelle avec $a; b; c$ et d).

$$\operatorname{Im}\varphi : b + c + d = 0. \tag{0.2}$$

L'assertion 06 A est donc vraie et l'assertion 06 B fausse.

$\operatorname{Im}\varphi$ est un hyperplan de E car il est défini par une seule équation donc $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3$. Ce qui entraîne que l'assertion 06 D est fausse.

L'assertion 06 C est fausse car le vecteur $\vec{k}$ n'est pas dans $\operatorname{Im}\varphi$.

Nous avons les réponses :

Question 06 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Les équations de $\ker \varphi$ sont obtenues en faisant $A = B = C = D = 0$ dans (4) :

$$\ker \varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} a - d &=& 0 \\ b - d &=& 0 \\ c + 2d &=& 0 \end{array} \right. . \tag{0.3}$$

Ce système est de rang 3, c'est celui de la matrice M. Donc $\dim(\ker \varphi) = 1$ et une base possible est

$$\mathcal{B}_{\ker \varphi} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + \vec{l} .$$

Nous en déduisons que les assertions 07 A et 07 D sont vraies et que les autres sont fausses.

Nous avons les réponses :

Question 07 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse

En raison des dimensions de $\operatorname{Im} \varphi$ et de $\ker \varphi$, nous ne pouvons pas avoir $\operatorname{Im} \varphi \subset \ker \varphi$; donc l'assertion 08 A est fausse.

Les équations de $\operatorname{Im} \varphi$ et de $\ker \varphi$ données respectivement par (0.2) et (0.3) montrent que $\ker \varphi \subset \operatorname{Im} \varphi$. L'assertion 08 B est donc vraie et l'assertion 08 C fausse.

L'assertion 08 D est vraie car la loi du rang est toujours vérifiée : $\dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim E = 4$.

Nous avons les réponses :

Question 08 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse

φ n'étant pas bijective, nous rejetons l'assertion 09 A.

Si S_{E_1} est une droite vectorielle alors en particulier si $\vec{u}$ est solution alors $2\vec{u}$ est aussi solution, ce qui impossible car

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{l} \\ \varphi(2\vec{u}) = 2\vec{u} + \vec{l} \end{array} \right. ;$$

ne peut être réalisé qui si $\vec{l} = \vec{0}$. Ainsi l'assertion 09 B est fausse.

Nous résolvons l'équation (E_1) en utilisant la technique de réduction du pivot de Gauss.

Le vecteur $\vec{l} = (2, -1, 0, 1)$, qui ne peut appartenir à $\ker \varphi$ d'après (0.3) ce qui implique que l'assertion 10 D est fausse, peut-être écrit avec MAPLE

```
> II := vector( [2, -1, 0, 1] ) ;
```

$$[2, -1, 0, 1]$$

Nous avons utilisé la notation II car I est réservé par MAPLE à $\sqrt{-1}$.

```
> evalm( M &* u - u = II ) ;
```

$$\begin{array}{c} [\,-5a + 5b + 8c + 15d = 2, \\ a - b - c - 3d = -1, \\ 2a - 4b - 6c - 8d = 0, \\ -3a + 4b + 6c + 10d = 1\,] \end{array} \tag{0.4}$$

Nous en déduisons que l'assertion 10 C est vraie.

Nous pouvons écrire directement sa matrice associée avec l'instruction M - 1 qui veut dire M - matrice Unité.

```
> Syst_1 := augment( M - 1, II ) :
```

$$Syst\_1 := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 & 15 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour réduire cette matrice nous faisons successivement

```
> swaprow( %, 1, 2 ) :
> pivot( %, 1, 1 ) :
> swaprow( %, 4, 2 ) :
> pivot( 2, 2 ) :
> mulrow( %, 3, 1/2 ) :
> pivot( %, 3, 3 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

Ce qui donne un système de rang 3 pouvant être exprimé à l'aide d'un seul paramètre.

Nous en déduisons que les assertions 10 A et 10 B sont fausses.

$$\begin{cases} a & & & - & 2d & = & -1 \\ & b & & + & d & = & 1 \\ & & c & & & = & -1 \\ & & & & d & = & \lambda \end{cases} \tag{0.6}$$

En prenant, par exemple, $\lambda = 1$ une solution de l'équation $\varphi\left(\vec{u}\right) = \vec{u} + \vec{j}$ est

$$\vec{j} = (1; 0; -1; 1)$$

Il est possible avec MAPLE de résoudre directement le système (0.4) :

```
> Syst_1 := {-5a + 5b + 8c + 15d -2, a - b - c - 3d + 1,
        2a - 4b - 6c - 8d, -3a + 4b + 6c + 10d -1 } :
```

La réponse est donnée par :

```
> solve( Syst_1, {a, b, c, d } ) ;
```

$$\{b = 1 - d, a = -1 + 2d, d = d, c = -1\}$$

MAPLE nous impose d comme paramètre. Nous obtenons la réponse précédente en donnant à d la valeur 1.

```
> subs( d = 1, % ) ;
```

$$\{a = 1, b = 0, c = -1, d = 1\}$$

C'est certainement plus rapide, mais MAPLE a la fâcheuse tendance d'éliminer des paramètres. Donc prudence, méthode à ne faire que pour vérification.

Nous en déduisons que les assertions 09 C et 12 B sont vraies et que les assertions 09 D, 12 C et 12 D sont fausses (Il est fréquent de rencontrer plusieurs fois la même question, c'est un contrôle des réponses au hasard, bonjour les pénalités).

Par ailleurs $\vec{j}$ ne peut appartenir à S_{E_1} car les solutions de (E_1) imposent $c = -1$ donc l'assertion 12 A est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 09 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Question 10 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Question 12 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Le système (S_2) propose de résoudre l'équation

$$\varphi\left(\vec{u}\right) = \vec{\imath} \tag{E_2}$$

n'est autre que le système (1) avec

$$A = 2;\ B = -1;\ C = 0 \text{ et } D = 1;$$

il est donc équivalent d'après (4) au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & & -\ d & = & 1 \\ & b & -\ d & = & -2 \\ & c & +\ 2d & = & 2 \end{array}\right. \tag{0.7}$$

qui est de rang 3. Donc l'assertion 11 A est vraie et l'assertion 11 B fausse.

φ n'étant toujours pas bijective implique que l'assertion 11 C est fausse. Attention à ne pas faire d'étourderie dans ce type de question piège.

Il est clair que les systèmes (0.6) et (0.7) n'ont pas de solution commune, donc l'assertion 11 D est fausse.

Nous remarquons que parmi les solutions possibles de (E_2) nous avons $\vec{\imath}$; c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Donc l'assertion 14 A est vraie.

Nous avons les réponses :

Question 11 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

La matrice P de la famille $F = \left(\vec{I};\ \vec{J};\ \vec{K};\ \vec{L}\right)$ dans B est

$$P = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} & \vec{L} \end{array} & \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \end{array} \end{array}$$

Il est clair que les assertions 13 A et 13 D sont des conditions nécessaires mais non suffisantes, donc à ce titre fausses.

Nous déterminons le rang de P:

```
> P := matrix( [ [2, 1, 1, 1], [-1, 0, 1, 1], [0, -1,-2, 0], [1, 1, 1, 0] ] ) ;
```

$$P := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> pivot( ", 4, 1 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> pivot( ", 3, 2 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous échangeons les deux premières lignes puis nous utilisons le pivot en position (2; 3) :

```
> pivot( ", 2, 3 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin nous utilisons le pivot en position $(1; 4)$

```
> pivot( ", 1, 4 ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que cette matrice est de rang 4 c'est donc la matrice d'un changement de bases. Ainsi P est inversible et $\mathcal{F}$ est libre et génératrice. Les deux assertions 13 B et 13 C sont donc fausses. Nous répondons vraie à l'assertion 13 E.

Nous avons les réponses :

Question 13 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Vraie

Nous savons que 1 est valeur propre de φ et que $\vec{I}$ est un vecteur propre associé d'après (E_2). Nous déterminons les autres vecteurs propres ne peuvent être déterminés qu'avec le système (0.7) qui est de rang 3, ce qui exclu les assertions 14 B, 14 C et 14 D, car $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Nous pouvons vérifier ce résultat en déterminons les valeurs propres et vecteurs propres de M.

```
> eigenvects( M ) ;
```

$$\{1, 2, [2, -1, 0, 1]\}, \{0, 2, [1, 1, -2, 1]\}$$

Ce qui veut dire de 0 et 1 sont des valeurs propres doubles n'ayant qu'un sous espace propres de dimension 1, respectivement les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{K}$; ce qui implique que φ n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable, d'où l'origine de la matrice T.

Nous avons les réponses :

Question 14 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Les équations (E_1) et (E_2) montrent que

$$\begin{cases} \varphi\left(\vec{I}\right) = \vec{I} \\ \varphi\left(\vec{J}\right) = \vec{I} + \vec{J} \end{cases}.$$

Les équations du noyau (0.3) montre que

$$\varphi\left(\vec{K}\right) = \vec{0}.$$

Il est immédiat que

$$\varphi\left(\vec{L}\right) = \vec{K}.$$

Ainsi dans la base $\mathcal{F}$ la matrice de φ est T (c'est la réduite de Jordan, en fait l'optimisation triangulaire).

Nous avons $PT = MP$ et non $TP = MP$ (pas évident à voir sauf si nous explicitons ce que représentent ces matrices)

$$\mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(\mathcal{B} \to \mathcal{F})\, \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{F})\, \mathrm{Mat}(\mathcal{F} \to \mathcal{B});$$

en d'autres termes

$$M = PTP^{-1}.$$

Ainsi l'assertion 15 B est vraie et les autres sont fausses.

Nous avons les réponses :

Question 15 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

La base canonique de E est $B_0 = \left(1; x; x^2; x^3; x^4\right)$ donc $\dim E = 5$. Ainsi l'assertion 16 A est fausse et l'assertion 16 B vraie. Attention à ne pas répondre trop vite.

Il est nécessaire que le Card F soit égal à 5, mais ce n'est pas suffisant. Donc l'assertion 16 C est fausse.

Les deux vecteurs $x + x^3$ et $x^2 + x^4$ ne sont pas proportionnels car x n'est pas un scalaire, mais un vecteur. Il faut faire la différence entre l'indéterminée x et la valeur réelle prise par x. Ainsi l'assertion 16 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 16 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Nous utilisons MAPLE pour étudier la famille F.

```
> with( linalg ) :
> M := matrix( [ [1,0,0,0,0], [0,1,0,0,0], [1,0,1,0,1], [0,1,0,1,0], [0,0,0,0,1] ] ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> p := vector( [-2, 3, 0, 0, 0 ] ) ;
```

$$p := [-2, 3, 0, 0, 0]$$

```
> augment( M, p ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons réduite cette matrice et prouver d'une part que F est une nouvelle base de E et d'autre part déterminer les coordonnées du polynôme $p(x) = -2 + 3x$ dans cette base.

```
> addrow( %, 1, 3, -1) :

> addrow( %, 2, 4, -1) :

> addrow( %, 5, 3, -1) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui exprime d'une part que le rang de la famille F est 5 donc c'est une base et a, b, c, d et e sont uniques et d'autre part que

$$-2 + 3x = -2\left(1 + x^2\right) + 3\left(x + x^3\right) + 2x^2 - 3x^3. \tag{0.8}$$

D'où $a = -2$; $b = 3$; $c = 2$; $d = -3$ et $e = 0$.

Ainsi les assretions 17 A et 17 C sont vraies et les autres fausses.

Nous avons les réponses :

Question 17 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

La relation (0.8) nous donne après division par $x^2\left(1+x^2\right)$ la décomposition en éléments simples de $f(x)$ suivante

$$f(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{3x}{1+x^2}.$$

D'où $\alpha = -2;\ \beta = 3;\ \gamma = 2;\ \delta = -3$ et $\varepsilon = 0$.

En particulier $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$ donc l'assertion 18 A est vraie. L'assertion 18 B est fausse car $\delta \neq \varepsilon$ par exemple.

La proposition faite sur f à l'assertion 18 C est insuffisante pour que f admette une primitive, il faut préciser de plus que f est au moins continue par morceaux. La proposition 18 D est assez fantaisiste donc à rejeter. Il faut être prudent.

Nous avons les réponses :

Question 18 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

La valeur de l'intégrale $F(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ est obtenue par

```
> f := x -> (-2+3*x) / x^2 / (1+x^2) :
> assume(lambda > 0) :

> Int(f(x), x = 1..lambda) : % = value(%) ;
```

$$\int_1^{\lambda} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\lambda} + 6\ln\lambda - 3\ln(1+\lambda^2) + 4\arctan\lambda - 4 - \pi + 3\ln 2\right)$$

f étant continue sur tout intervalle fermé de la forme $[1;\lambda]$ si $\lambda > 1$ ou $[\lambda;1]$ si $0 < \lambda \leq 1$ alors F existe et est dérivable donc continue. Les deux assertions 19 A et 19 B sont donc fausses.

En regroupant $6\ln\lambda - 3\ln(1+\lambda^2)$ sous la forme

$$\ln\frac{\lambda^6}{\left(1+\lambda^2\right)^3}$$

il est clair que la limite de cette expression est nulle (comportement à l'infini d'une fraction rationnelle). Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)\,dx &= 2\frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\ln 2\\ &= -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Ainsi l'assertion 19 C est fausse et l'assertion 19 D vraie.

Nous avons les réponses :

Question 19 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse

Il faut préciser que f est dérivable sur tout intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R}^*$, ce qui est en fait sous entendu.

```
> df := diff(f(x), x) ;
```

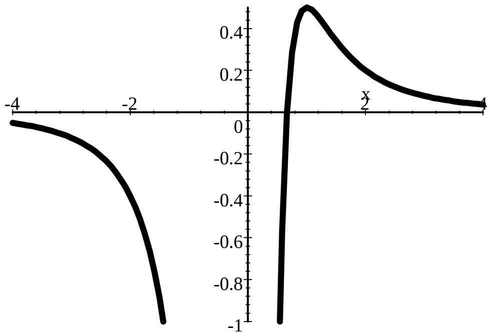
$$df := \frac{(1-x)\left(4+x+9x^2\right)}{x^3\left(1+x^2\right)^2}$$

Ce qui prouve que l'assertion 20 A est vraie.

Le trinôme du second degré $4 + x + 9x^2$ a un discriminant $\Delta = -143 < 0$ donc la seule racine de f' est $x = 1$. Ce qui prouve que l'assertion 20 B est fausse.

Pour examiner les deux autres assertions nous pouvons, soit calculer f'' ce qui est long, soit (plus simple) tracer la courbe (avec un petit risque).

```
> plot(f(x), x = -4..4, -1..1/2, numpoints = 1000) ;
```



Courbe f

Il est visible sur ce dessin que la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas concave sur $[1; +\infty[$ (un calcul plus fin montre que $x = 1,33$ est un point d'inflexion), donc l'assertion 20 C est fausse. Nous pouvons accepter l'assertion 20 D en prenant par exemple l'intervalle $[3; 4]$.

Nous avons les réponses :

Question 20 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse

---

Les deux fonctions x et y ne sont pas définies pour $t = 0$ et $t = 1$ donc $D = \mathbb{R} - \{0; 1\}$. L'assertion 21 A est donc vraie et l'assertion 21 B fausse.

La fonction x est prolongeable par continuité en $t = 1$ en posant

$$x(1) = \lim_{t \to 1} \frac{\ln |t|}{t - 1} = 1$$

valeur obtenue en remarquant que c'est par définition la valeur de la dérivée de la fonction ln en $t = 1$. Ainsi l'assertion 21 C est fausse.

La fonction $t \to t + \frac{1}{t}$ est dérivable sur D donc y est dérivable sur D. L'assertion 21 D est donc fausse.

Nous avons les réponses :

Question 21 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Calculons la dérivée x' de x. Nous la définissons par morceaux pour supprimer la valeur absolue.

```
> x := t -> piecewise( t<0, ln(-t) / (t-1) , t>0, ln(t) / (t-1) ) :
```

```
> dx := t -> simplify( diff( x(t), t ) ) : dx(t) ;
```

$$\begin{cases} \dfrac{t - 1 - t\ln(-t)}{t(-1+t)^2} & \text{si } t < 0 \\ \text{undefined} & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{t - 1 - t\ln t}{t(-1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{0.9}$$

Ce qui établit que

$$'(t) = 1 - \frac{1}{t} - \ln |t|$$

et prouve que les assertions 22 A et 22 B sont fausses.

Sur D la fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(t) = \frac{1 - t}{t^2}.$$

Donc les assertions 22 C et 22 D sont vraies.

Nous avons les réponses :

Question 22 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Vraie	D) Vraie	E) Fausse

Nous étudions la fonction g sur l'intervalle I :

```
> g := t -> -exp( 1-1 / t) :
> evalf(g(-4)) , evalf(g(-3)) ;
```

$$-3.490342957, \quad -3.793667893$$

La fonction g est dérivable au moins deux fois (elle est de classe C^{∞}) sur I et nous avons

```
> dg := t -> diff( g(t), t ) : dg(t) ;
```

$$-\frac{e^{(1-1/t)}}{t^2}$$

```
>evalf(subs(t = -4, dg) ), evalf(subs(t = -3, dg) ) ;
```

$$-.2181464348, \quad -.4215186547$$

```
> ddg := t -> diff( g(t), t$2 ) : ddg(t) ;
```

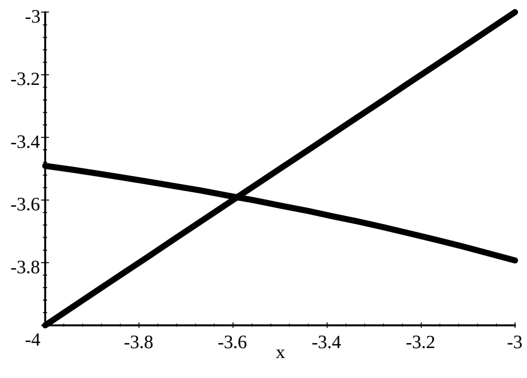
$$\frac{(-1 + 2t)\, e^{(1-1/t)}}{t^4}$$

Ce qui nous donne le tableau des variations

t	-4			α		-3
g''		$-$			$-$	
g'	$-.22$	$\searrow$			$\searrow$	$-.42$
g	-3.49	$\searrow$		0	$\searrow$	-3.79

Un contrôle est obtenu en traçant la courbe représentative de g et la première bissectrice.

```
> plot( { g(t), t } t = -4..-3 ) ;
```



Courbe g

Ce qui prouve que l'assertion 23 A est fausse et que l'assertion 23 B est vraie.

Les deux assertions 23 C et 23 B font référence au théorème du point fixe (Brower).

La fonction g est strictement monotone sur I; telle que $g(I) = [-3.79, -3.50] \subset I$ donc I est stable par g et contractante car $|g'(t)| < 1$ sur I ce qui implique que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $w_0 = -3$ converge vers le point fixe de I.

Les assertions 23 C, 23 D et 24 A sont donc fausses.

Nous avons les réponses :

Question 23 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Sur I l'expression de φ' est $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} - \ln(-t)$ donc les zéros sont donnés par

$$1 - \frac{1}{t} = \ln(-t) \iff t = -e^{(1-1/t)}.$$

Ce qui exprime que la solution β de $\varphi'(t) = 0$ sur I n'est autre que le point fixe de g. et prouve que l'assertion 24 C est vraie et que 24 B est fausse.

Déterminons une valeur approchée de β en utilisant la suite w.

```
> w := -3 :

> for n from 1 to 10 do w := evalf ( subs( t = w, g(t) ) ) od;
```

$$w := -3.793667893$$
$$w := -3.538125751$$
$$\cdots$$
$$w := -3.591128448$$
$$w := -3.591119535$$

Plus précisèment, le point fixe est obtenu par

```
> beta := fsolve( g(t) = t, t, -4..-3 ) ;
```

$$\beta := -3.591121477$$

Ainsi une valeur approchée, par excès à 10^{-2} près est -3.59. L'assertion 24 D est donc fausse.

Nous avons les réponses :

Question 24 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

A partir des résultats précédents sur φ et avec (0.9) nous obtenons les variations de x'.

t	$-\infty$		β			0			1		$+\infty$
φ'		$+$		$+$		$\|\|$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
x'		$-$	0	$+$		$\|\|$		$-$	$-1/2$	$-$	

Nous dérivons y.

```
> y := t -> piecewise( t<0, ln(-t-1/t), t>0, ln(t+1/t) ) :
> dy := t -> simplify( diff( y(t), t) ) : dy(t) ;
```

$$\begin{cases} \dfrac{t^2 - 1}{t\,(1+t)^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{0.10}$$

Nous en déduisons de (0.10) les variations de y'.

t	$-\infty$		β		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$-.49$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$y'(\beta) = \dfrac{\beta^2 - 1}{\beta\,(1+\beta)^2} \approx -0.49$ donc l'assertion 25 A est fausse (Attention : elle est vraie en partie).

$x'(t) > 0$ sur l'intervalle $]\beta; 0[$ donc l'assertion 25 B est vraie.

$y'(t) > 0$ sur l'intervalle $]-1; 0[$ donc l'assertion 25 C est vraie.

Enfin $x'(-1) \neq 0$ donc l'assertion 25 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 25 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Les tableaux donnant les signes de x' et de y' déterminent les variations de x et de y:

t	$-\infty$		β		-1			0			1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	$1/2$	$+$		$\|\|$		$-$	$-1/2$		
x	0	$\searrow$	$-.28$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	1.35	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	$-.49$	$-$	0	$+$		$\|\|$		$-$	0	$+$	

En conclusion :

x et y sont simultanément croissantes sur l'intervalle $[-1; 0[$ donc l'assertion 26 A est vraie car il suffit de partager $[-1; 0[$ en deux intervalles. C'est ce genre d'assertion qui, si on répond trop vite, est délicat. Il faut bien interpréter ce qui est demandé, ce qui n'est pas toujours facile à faire.

x et y sont décroissantes sur $]-\infty; \beta]$ donc l'assertion 26 B est vraie.

y est croissante sur $[1; +\infty[$ donc l'assertion 26 C est fausse.

y est décroissante sur $]0; 1[$ donc l'assertion 26 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 26 :	A) Vraie	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

Pour $t = -1$, nous avons $y'(-1) = 0$ et $x'(-1) = \frac{1}{2}$ donc Γ admet une tangent horizontale au point de coordonnées $(x(-1) = 0; y(-1) = \ln 2)$, ainsi les deux assertions 27 A et 27 B sont fausses.

Pour $t = 1$, nous avons $y'(1) = 0$ et en posant $t = 1 + h$, nous obtenons le développement limité à l'ordre 2 de x

$$\begin{aligned} x(1+h) &= \frac{\ln(1+h)}{h} \\ &= 1 - \frac{h}{2} + o(h) \end{aligned}$$

qui prouve que $x'(1) = -\frac{1}{2}$. Donc Γ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(x(1) = 1; y(1) = \ln 2)$, ainsi les deux assertions 27 C et 27 D sont fausses. Remarquer le piège de l'assertion 27 D.

Dur, dur, les Questionnements Automatisables.

Nous devons répondre vraie à l'assertion E.

Nous avons les réponses :

Question 27 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Fausse	E) Vraie

Au voisinage de $t = 0$, il est clair que nous avons les équivalences

$$x(t) \underset{t=0}{\sim} -\ln|t| \text{ et } y(t) \underset{t=0}{\sim} -\ln|t| \tag{0.11}$$

donc l'assertion 28 A est fausse et l'assertion 28 B est vraie.

Il n'est pas prudent de faire des combinaisons linéaires d'équivalences, donc nous développons

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) &= \ln\left|\frac{1+t^2}{t}\right| - \frac{\ln|t|}{-1+t} \\ &= \ln\left(1+t^2\right) + \frac{t}{1-t}\ln|t|. \end{aligned} \tag{0.12}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{y(t) - x(t)}{\ln|t|} = \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{\ln|t|} + \frac{t}{1-t}$$

admet une limite nulle pour $t \to 0$, donc l'assertion 28 C est fausse.

De manière analogue

$$\begin{aligned} y(t)+x(t) &= \ln\left|\frac{1+t^2}{t}\right| + \frac{\ln|t|}{-1+t} \\ &= \ln\left(1+t^2\right) + \frac{2-t}{-1+t}\ln|t|. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{y(t)+x(t)}{t\ln|t|} = \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t\ln|t|} + \frac{2-t}{(-1+t)\,t}$$

admet pour limite $+\infty$ pour $t \to 0^-$; donc l'assertion 28 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 28 :	A) Fausse	B) Vraie	C) Fausse	D) Fausse	E) Fausse

D'après le tableau des variations de x et de y; les seules asymptotes posssibles sont pour $t = 0$ et $t = \pm 1$ dans ce dernier cas, il est clair que l'asymptote existe et est la droite $x = 0$. Ce qui permet de conclure que les assertion 32 A et 32 B sont fausses.

D'après (0.11) la droite $y = x$ est au moins direction asymptotique.

Nous développons l'expression donnée en (0.12)

$$\begin{aligned} y(t)-x(t) &= \ln\left(1+t^2\right) + \frac{t}{1-t}\ln|t| \\ &\underset{t=0}{\sim} t^2 + t\ln|t| \end{aligned} \tag{0.13}$$

qui admet une limite nulle pour $t \to 0$. Donc $y = x$ est asymptote à Γ. Ainsi les assertions 29 A et 32 D sont vraies et les assertions 29 B, 29 D et 32 C fausses.

Nous pouvons préciser le signe de l'équivalent donné en (0.13). En effet, nous savons que $\ln|t| = -o\left(|t|^{-\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$ quelconque, donc en choisissant $\alpha = -\frac{1}{2}$, la partie principale de $t^2 + t\ln|t|$ est $-t\sqrt{|t|}$. Ce qui prouve que Γ est au dessus de son asymptote pour $t < 0$ et au dessous pour $t > 0$. L'assertion 29 C est donc vraie.

Nous avons les réponses :

Question 29 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Il est évident que les valeurs de u et de v sont différentes de zéro.

La condition $y(u) = y(v)$ équivaut à $\left|u + \frac{1}{u}\right| = \left|v + \frac{1}{v}\right|$ que nous pouvons expliciter en élevant au carré.

$$\begin{aligned} \left(u+\frac{1}{u}\right)^2 - \left(v+\frac{1}{v}\right)^2 &= \frac{1}{u^2v^2}\left[v^2\left(1+u^2\right)^2 - u^2\left(1+v^2\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{u^2v^2}\left(u^2-v^2\right)\left(u^2v^2-1\right). \end{aligned}$$

Ainsi les seules solutions possibles sont

$$v = -u;\ v = \frac{1}{u} \text{ et } v = -\frac{1}{u}.$$

Nous comparons, pour les trois valeurs ci-dessus, $x(v)$ et $x(u)$:

1. Premier cas : $v = -u$.

$$x(-u) = \frac{\ln|-u|}{-1-u} = \frac{\ln|u|}{-1-u}$$

qui ne peut être égal à $x(u)$ que si et seulement si $u = 0$; ce qui est impossible.

2. Deuxième cas : $v = \frac{1}{u}$.

$$x\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\ln\left|\frac{1}{u}\right|}{-1+\frac{1}{u}} = \frac{u}{-1+u}\ln|u|$$

qui ne peut être égal à $x(u)$ que si et seulement si $u = 1$ et donc $v = 1$; ce qui est impossible car $u \neq v$.

3. Troisième cas : $v = -\frac{1}{u}$.

$$x\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{\ln\left|-\frac{1}{u}\right|}{-1-\frac{1}{u}} = \frac{u}{1+u}\ln|u|$$

qui est égal à $x(u)$ que si et seulement si

$$\frac{u}{1+u} = \frac{1}{-1+u} \iff 1 - 2u + u^2 = 0. \qquad (0.14)$$

Ce qui permet d'accepter les assertions 30 A et 30 C et de rejeter les deux autres.

Nous avons les réponses :

Question 30 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

Les solutions de l'équation (0.14) sont

$$u = 1 - \sqrt{2} \text{ et } v = 1 + \sqrt{2}.$$

L'assertion 31 A est donc vraie et l'assertion 31 B est fausse.

Les valeurs approchées du point doubles sont

```
> evalf( subs( t = 1-sqrt(2), { x(t), y(t) } ) ) ;
```

$$\{1.039720772, .6232252405\}$$

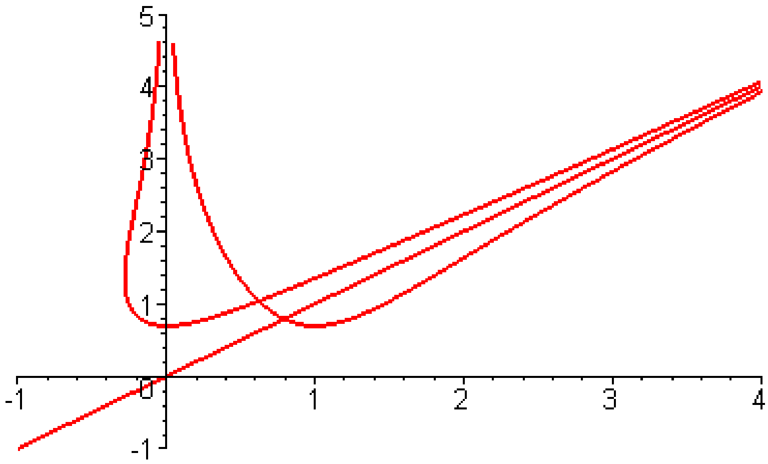
L'assertion 31 C est donc vraie et l'assertion 31 D est fausse.

Nous avons les réponses :

Question 31 :	A) Vraie	B) Fausse	C) Vraie	D) Fausse	E) Fausse

En complément le tracé de Γ est

```
> with( plots ) : { Pour tracer l'arc paramétré et l'asymptote }
> a := plot( [ x(t), y(t), t = -100..100], numpoints=1000) :
> b := plot( x, x = -1..4, -1..5 ) :
> display( a, b ) ;
```



Courbe Γ

Nous avons les réponses :

Question 32 :	A) Fausse	B) Fausse	C) Fausse	D) Vraie	E) Fausse